N° d'ordre 81-2

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE LIMOGES

pour l'obtention du

DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE

par

Ioannis ANDRITSOS

PROPAGATION DU MODE TE_{11} DANS UN GUIDE CIRCULAIRE COURBE.

Soutenue le 6 février 1981 devant la Commission d'examen :

Messieurs	Y. GARAULT	Président
	J. CITERNE	Examinateurs
	C. FRAY	
	A. PAPIERNIK	
	D. THEBAULT	

" En toutes choses il n'y a qu'une manière de commencer quand on veut discuter convenablement : il faut bien comprendre l'objet de la discussion ".

PLATON

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electronique des Microondes de l'Université de LIMOGES, dirigé par Monsieur le Professeur Y. GARAULT. Je lui exprime toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans son Laboratoire.

Monsieur le Professeur A. PAPIERNIK a été mon Directeur de recherche. Je lui exprime toute ma reconnaissance et je le remercie pour les précieux conseils et sa grande disponibilité à mon égard.

Monsieur C. FRAY, Maître-Assistant à l'I.U.T. de LIMOGES a dirigé cette étude. Je lui exprime mes plus vifs remerciements pour les nombreux conseils dont il m'a fait bénéficier et pour l'aide constante qu'il m'a apportée afin que ce travail puisse être accompli.

Cette étude a été réalisée avec le soutien du C.N.E.T. et je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur D. THEBAULT, Ingénieur des Télécommunications, qui a suivi et encouragé ce travail, et qui a bien voulu prendre part au jury.

De même, je tiens à remercier Monsieur J. CITERNE Professeur à l'INSA de RENNES qui a accepté de juger ce travail.

J'associe à ces remerciements Messieurs D. MAHE, M. GIRY, J. DUMONT du Centre de Calcul de l'Université de LIMOGES pour les conseils et l'aide qu'ils m'ont donnés lors de la réalisation des programmes.

Je tiens à remercier Madame M.T. FRUGIER qui a assuré le travail ingrat de la frappe et le personnel du service Imprimerie de l'U.E.R. des Sciences qui a effectué le tirage de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

ANNEXE

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

$\vec{E}$	vecteur du champ électrique
$\vec{E}_t$	vecteur de la composante transversale du champ électrique
$\vec{H}$	vecteur du champ magnétique
$\vec{H}_t$	vecteur de la composante transversale du champ magnétique
E_z	champ électrique longitudinal
H_z	champ magnétique longitudinal
ϕ_{mp}	fonction propre de type Dirichlet
Ψ_{mp}	fonction propre de type Neumann
ρ	rayon polaire
θ	angle azimutal
a_{mp}, b_{mp}, c_{mp}	coefficients du développement en modes propres du champ électrique $\vec{E}$
$\alpha_{mp}, \beta_{mp}, \gamma_{mp}$	coefficients du développement en modes propres du champ magnétique $\vec{H}$
$\vec{grad}_t$	l'opérateur gradient transversal donné par la relation : $\vec{grad}_t = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ dans des coordonnées cartésiennes
S	l'abscisse curviligne du guide courbé
Φ	l'ouverture du coude
u_{mp}	$p^{\text{ième}}$ racine de la fonction $J_m(x)$
v_{mp}	$p^{\text{ième}}$ racine de la fonction $J'_m(x)$
K_{mp}	valeur propre donnée par $K_{mp} = \frac{u_{mp}}{a}$
ℓ_{mp}	valeur propre donnée par $\ell_{mp} = \frac{v_{mp}}{a}$
a	rayon du guide
R	rayon de courbure
$J_m(x)$	fonction de Bessel d'ordre m
$J'_m(x)$	dérivée de la fonction de Bessel $J_m(x)$ d'ordre m
a/R	paramètre de perturbation
η_1, η_2	coefficients du développement en Poincaré pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie
ξ_1, ξ_2	coefficient du développement en Poincaré pour la polarisation parallèle au plan de symétrie

Z_o	impédance des ondes planes
Ka	fréquence normalisée
S^*	abscisse curviligne modifiée par Poincaré
γ_{11}	constante de propagation du mode TE_{11} du guide rectiligne
γ_{nq}	constante de propagation du mode TE_{nq}
ν_{nq}	constante de propagation du mode TM_{nq}
$F_q, f_q, g_q, e_q, h_q, d_q$	coefficients des couplages entre le mode TE_{11} d'ordre (o) et des modes parasites d'ordre (1)
H_i (i=0,1,2...)	coefficients des couplages avec un mode TE
E_i (i=0,1,2...)	coefficients des couplages avec un mode TM
$\gamma_{11}^{\perp}$	constante de propagation modifiée du mode TE_{11} pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie
$\gamma_{11}^{\parallel}$	constante de propagation modifiée du mode TE_{11} pour la polarisation parallèle au plan de symétrie.
$P_T^{\perp}(TE_{nq}^{(1)})$	puissance transmise à travers le coude transportée par un mode TE_{nq} d'ordre (1) pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie
S_1	longueur totale du coude
L	longueur du tronçon du guide entre les deux coudes
$b_{11}^{\perp}(S_1)$	amplitude de l'onde transmise à la sortie du coude du mode TE_{11} pour la polarisation perpendiculaire
$b_{11}^{\perp}(S_3)$	amplitude de l'onde transmise à la sortie du deuxième coude pour la polarisation perpendiculaire
λ	valeurs propres
{Y}	vecteurs propres associés aux valeurs propres
τ	temps de propagation du groupe
$\phi_c^{\perp}$	déphasage à la sortie du coude pour la polarisation perpendiculaire.
ϕ_g	déphasage à la sortie du guide rectiligne
α	pertes additionnelles
ϕ_p	différence de phase entre les deux polarisations.
D	affaiblissement diaphonique.

INTRODUCTION

Actuellement le guide circulaire fonctionnant sur son mode fondamental TE_{11} commence à être utilisé comme feeder pour infrastructure hertzienne au-dessus de 10 GHz. Comparé aux liaisons feeders classiques en guide elliptique ou en guide rectangulaire (pertes en ligne de l'ordre de 15 dB/100m au-dessus de 10 GHz), le guide circulaire (pertes en ligne de l'ordre de 4 dB/100 m au-dessus de 10 GHz) minimise l'atténuation du feeder. De plus, dans une seule liaison en guide circulaire, on peut envisager de transporter deux polarisations simultanément grâce à la symétrie dipolaire du mode fondamental. Des guides circulaires rigides sont commercialisés mais uniquement pour les parties rectilignes de la liaison (du bas au sommet du pylone par exemple). Le prix de revient de ces guides avec les transitions et l'installation est très élevé car ils sont vendus par tronçons de 6 m rigoureusement rectiligne et le montage exige beaucoup de soin. Si les pertes concernant la partie rectiligne sont faibles, il faut tenir compte des pertes dues aux transitions guide circulaire - guide rectangulaire et au guide elliptique utilisé pour relier la sortie des amplificateurs au bas du pylone par exemple. Par suite, les pertes de la liaison sont nettement augmentées et peuvent atteindre 10 dB/100m. Aussi il paraît très intéressant d'utiliser comme liaison feeder un guide circulaire non rigide. Ce guide devra être fabriqué en continu et enroulé sur des tourets pour faciliter le transport et la pose ; les pertes additionnelles dues aux coudes devront rester faibles.

La fabrication en continu du guide circulaire non rigide ne semble pas poser de problèmes. Les pertes du mode TE_{11} deviennent faibles lorsque la fréquence de fonctionnement dépasse 1,5 fois la fréquence de coupure. Dans ces conditions le guide est surdimentionné et il est susceptible de propager d'autres modes. Ces modes parasites apparaissent à la moindre irrégularité de la ligne notamment en courbure et ils se couplent au mode TE_{11}. La présence donc des coudes introduit nécessairement des couplages de modes qui peuvent dégrader la qualité de la ligne et créer des pertes adtionnelles dues aux phénomènes de conversion et de reconversion des modes. L'étude de l'influence de la courbure sur la propagation du mode TE_{11} n'a été que très peu abordée à notre connaissance. Une étude très partielle a été faite par G. ANDREASEN (1,2) ; en étudiant le couplage mode à mode, il a mis en évidence deux directions de propagation privilégiées, l'une dans le plan de symétrie du coude et l'autre perpendiculaire à ce plan.

Par contre, l'étude de la propagation du mode TE_{01} a fait l'objet de nombreux travaux dans le domaine de la recherche des lignes à faibles pertes. Le choix du mode TE_{01} comme support de transmission s'explique par sa facilité relative d'excitation et surtout par son atténuation linéique très basse.

Les études de transmission du mode TE_{01} sur guide d'ondes circulaires avaient permis :

. de mettre au point des mesures d'atténuation surtout dans le domaine des ondes millimétriques pour une transmission à grande distance (3,4,5)

. d'analyser les effets dus à la courbure :

a) dans des guides métalliques nus (6-10)

b) dans des guides à revêtement diélectrique (10,11)

c) dans des guides supraconducteurs (12)

. d'étudier la transmission sur un guide à structure hélicoïdale droit et en courbure (13-18).

. d'évaluer l'effet des irrégularités internes sur la propagation (19-21)

Ce guide millimétrique fonctionnant sur le mode TE_{01} a été abandonné (peut-être provisoirement) au profit des structures qui semblent plus prometteuses : les fibres optiques.

Pour une liaison feeder au-dessus de 10 GHz, l'utilisation du guide circulaire classique paraît intéressante à cause des faibles pertes du mode fondamental. Nous avons donc entrepris l'étude théorique de la propagation de ce mode dans un guide circulaire courbé avec comme objectif, la détermination des pertes additionnelles créées par un ou plusieurs coudes, de l'ondulation du temps de propagation de groupe et de la diaphonie dans le cas de transport de deux polarisations.

Après avoir brièvement rappelé dans le premier chapitre les propriétés électromagnétiques du mode TE_{11} du guide circulaire rectiligne, le deuxième chapitre est consacré à l'établissement des systèmes d'équations différentielles vérifiés par les différents modes de propagation à l'intérieur du guide circulaire courbé. En introduisant un système de coordonnées toroïdales et en développant le champ électromagnétique en modes propres d'une section droite du guide courbé, on obtient un système d'équations différentielles couplées pour chacune des deux polarisations dont la résolution fait l'objet des chapitres suivants. Nous avons utilisé deux méthodes de résolution. La première méthode exposée dans le chapitre III est la méthode de perturbation. Cette méthode approximative conduit à des expressions analytiques des composantes du champ électromagnétique. Pour simplifier l'étude nous nous sommes limités à l'ordre (2). En fin de ce chapitre nous avons étudié le cas de deux coudes séparés par un tronçon de guide. La deuxième méthode décrite est la méthode matricielle. Elle est exposée dans le chapitre IV qui présente le principe de cette méthode numérique et les algorithmes de résolution des systèmes d'équations différentielles couplées obtenus. La première partie du chapitre V est consacrée à la comparaison des deux méthodes. Cette comparaison est faite sur la constante de propagation et la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie d'un coude. La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'influence d'un coude sur les pertes additionnelles, le temps de propagation de groupe et la diaphonie dans le cas du transport de deux polarisations.

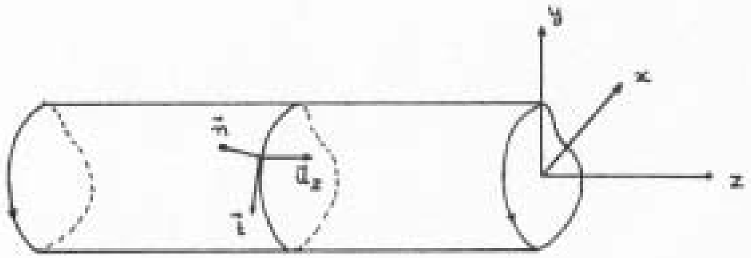
CHAPITRE I

PROPAGATION DU MODE TE_{11} DANS UN GUIDE CIRCULAIRE PARFAIT.

Ce premier chapitre est consacré à un rappel des propriétés électromagnétiques des modes dans un guide cylindrique rectiligne de section circulaire et parfaitement conducteur.

Un développement du champ électromagnétique en fonctions propres et vecteurs propres relatif à une section droite du guide lisse permet, à partir des équations de Maxwell, le calcul des composantes du champ électromagnétique. L'atténuation du mode TE_{11} est calculée en tenant compte des pertes par effet Joule sur les parois du guide. En fin de chapitre, les courbes théoriques de l'atténuation des modes TE_{11}, TM_{01}, TE_{21} et TE_{01} sont présentées pour le guide circulaire WC 109.

1 - DEVELOPPEMENT DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN VOLUME CYLINDRIQUE.



- Fig.1 -

Le champ électrique et le champ magnétique peuvent être décomposés en composantes longitudinales dirigées suivant l'axe Oz et, en composantes transversales contenues dans le plan perpendiculaire à Oz telles que :

$$\vec{E} = \vec{E}_t + u_z E_z$$
$$\vec{H} = \vec{H}_t + u_z H_z \qquad (1)$$

Les composantes longitudinales E_z et H_z peuvent être développées à l'aide des fonctions propres $\phi_{mp}(\rho, \theta)$ et $\Psi_{mp}(\rho, \theta)$ d'une section droite du guide. De même, les composantes transversales $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$ peuvent être développées à l'aide des vecteurs propres de type électrique $\vec{grad}_t\, \phi_{mp}$ et $\vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t\, \Psi_{mp}$ ou de vecteurs propres de type magnétique $\vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t\, \phi_{mp}$ et $\vec{grad}_t\, \Psi_{mp}$. La définition et les propriétés des fonctions propres et des vecteurs propres apparaissent dans l'annexe A.

Les fonctions propres ϕ_{mp} et les vecteurs propres de type électrique dont les conditions aux limites sur le contour correspondent à celles vérifiées par le champ électrique, sont utilisées dans le développement du champ électrique. Les fonctions propres Ψ_{mp} et les vecteurs propres de type magnétique sont utilisés pour développer le champ magnétique.

Le développement du champ électromagnétique a donc pour expression :

$$\vec{E} = \sum_m \sum_p a_{mp}(z,t)\,\vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp} + \sum_m \sum_p b_{mp}(z,t)\,\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp} + \sum_m \sum_p c_{mp}(z,t)\,\varphi_{mp}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{H} = \sum_m \sum_p \alpha_{mp}(z,t)\,\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp} + \sum_m \sum_p \beta_{mp}(z,t)\,\vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp} + \sum_m \sum_p \gamma_{mp}(z,t)\,\psi_{mp}\,\vec{u}_z$$

Les coefficients de développementssont donnés par les intégrales :

$$a_{mp} = \frac{1}{k^2_{mp}} \int_s \vec{E}_t \cdot \vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp}\,ds = \frac{1}{k^2_{mp}} \int_s \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp}\,ds$$

$$b_{mp} = \frac{1}{\ell^2_{mp}} \int_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp})\,ds = \frac{1}{\ell^2_{mp}} \int_s \vec{E} \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp})\,ds$$

$$c_{mp} = \int_s E_z\,\varphi_{mp}\,ds = \int_s \vec{E} \cdot \vec{u}_z\,\varphi_{mp}\,ds$$

$$\alpha_{mp} = \frac{1}{k^2_{mp}} \int_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp})\,ds = \frac{1}{k^2_{mp}} \int_s \vec{H} \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp})\,ds \qquad (2)$$

$$\beta_{mp} = \frac{1}{\ell^2_{mp}} \int_s \vec{H}_t \cdot \vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp}\,ds = \frac{1}{\ell^2_{mp}} \int_s \vec{H} \cdot \vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp}\,ds$$

$$\gamma_{mp} = \int_s H_z\,\psi_{mp}\,ds = \int_s \vec{H} \cdot \vec{u}_z\,\psi_{mp}\,ds$$

2 - CALCUL DES COEFFICIENTS DES FONCTIONS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

En développant les équations de Maxwell suivant les fonctions propres et les vecteurs propres et en tenant compte des conditions aux limites sur le cylindre r = a, on obtient les relations suivantes entre les coefficients des développements {22} :

$$\frac{\partial a_{mp}}{\partial z} + j\omega\mu\,\alpha_{mp} - c_{mp} = 0 \qquad \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial z} - j\omega\varepsilon\,b_{mp} - \gamma_{mp} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial z} + j\omega\varepsilon\,a_{mp} = 0 \qquad \frac{\partial b_{mp}}{\partial z} - j\omega\mu\,\beta_{mp} = 0 \qquad (3)$$

$$\alpha_{mp} + \frac{j\omega\varepsilon}{k^2_{mp}}\,c_{mp} = 0 \qquad b_{mp} - \frac{j\omega\mu}{\ell^2_{mp}}\,\gamma_{mp} = 0$$

Le premier ensemble d'équations précédent correspond aux modes TM_{mp} et le deuxième aux modes TE_{mp}.

Les équations différentielles vérifiées par les coefficients se déduisent de ces relations.

$$\frac{\partial^2 a_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - k^2_{mp})\, a_{mp} = 0 \qquad \frac{\partial^2 b_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - \ell^2_{mp})\, b_{mp} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - k^2_{mp})\, \alpha_{mp} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \beta_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - \ell^2_{mp})\, \beta_{mp} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 c_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - k^2_{mp})\, c_{mp} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - \ell^2_{mp})\, \gamma_{mp} = 0$$

3 - LES CHAMPS DU MODE TE_{mp}

D'après le développement du champ électromagnétique en fonctions propres et en vecteurs propres, les champs électrique et magnétique transversaux et les champs magnétique et électrique longitudinaux pour les modes TE_{mp} s'écrivent :

$$\vec{E}_t = b_{mp}\, \vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp}$$

$$\vec{H}_t = \beta_{mp}\, \vec{grad}_t \Psi_{mp}$$

$$H_z = \gamma_{mp} \Psi_{mp} \qquad (5)$$

$$E_z = 0$$

Compte tenu des relations précédentes et des équations (4) on trouve :

$$\vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{\ell^2_{mp}}\, \vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t H_z$$

$$\vec{H}_t = -\frac{j\gamma}{\ell^2_{mp}}\, \vec{grad}_t H_z \qquad (6)$$

où $\gamma^2 = k^2 - \ell^2_{mp}$ la constante de propagation du mode TE_{mp}.

4 - CALCUL DU FLUX DE PUISSANCE

Le flux de puissance moyenne est donné par le vecteur de Poynting :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \iint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z \, ds \tag{7}$$

En remplaçant $\vec{E}$, $\vec{H}$ par :

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{u}_z E_z$$

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{u}_z H_z$$

la relation précédente s'écrit :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \iint_S (\vec{E}_t \wedge \vec{H}_t^*) \cdot \vec{u}_z \, ds$$

Compte tenu des expressions de $\vec{E}_t$, $\vec{H}_t$ calculées dans le paragraphe précédent, on a :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{\omega \mu}{\ell_{mp}^2} \iint_S (\vec{\mathrm{grad}}_t H_z)^2 \, ds$$

En appliquant le théorème de la divergence et la condition aux limites ($\partial H_z / \partial_n = 0$ sur C) on obtient :

$$\iint_S \mathrm{div}(H_z \, \vec{\mathrm{grad}}_t H_z) \, ds = \int_C H_z \, \vec{\mathrm{grad}}_t H_z \cdot \vec{n} \, dc = \int_C H_z \frac{\partial H_z}{\partial n} \, dc = 0$$

mais l'intégrale précédente peut s'écrire :

$$\iint_S \mathrm{div}(H_z \, \vec{\mathrm{grad}}_t H_z) \, ds = \iint_S (\vec{\mathrm{grad}}_t H_z \cdot \vec{\mathrm{grad}}_t H_z) \, ds + \iint_S \mathrm{div} \, \vec{\mathrm{grad}}_t H_z \, ds$$

H_z vérifie l'équation :

$$\mathrm{div} \, \vec{\mathrm{grad}}_t H_z + \ell_{mp}^2 H_z = 0$$

Donc à partir de ces trois expressions le flux de puissance s'écrit

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{K Z \gamma}{\ell_{mp}^2} \iint_S H_z^2 \, ds \tag{8}$$

5 - PERTES DANS UN GUIDE CIRCULAIRE

En chaque point de la surface du guide, on associe au champ magnétique la densité de courant superficielle :

$$\vec{J}_s = \vec{n} \wedge \vec{H} \tag{9}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_t + \vec{u}_z H_z \\ \vec{H}_t &= -\frac{j\gamma}{\ell^2_{mp}} \, \vec{\mathrm{grad}}_t H_z \end{aligned} \tag{10}$$

En remplaçant ces expressions dans la relation (9) on a :

$$\vec{J}_s = -\frac{j\gamma}{\ell^2_{mp}} \frac{dH_z}{dc} \vec{u}_z - \vec{t} H_z \tag{11}$$

Les pertes par effet Joule sur les parois du guide par unité de longueur sont données par la relation suivante :

$$P_J = \frac{R_s}{2} \int_c \vec{J}_s \cdot \vec{J}_s^* \, dc \tag{12}$$

où R_s est la résistivité superficielle du guide donnée par la relation :

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} \tag{13}$$

où f est la fréquence, et σ la conductivité.

Donc les pertes par effet Joule sont données par la relation :

$$P_J = \frac{R_s}{2} \int_c \left(H_z^2 + \frac{\gamma^2}{\ell^4_{mp}} \left| \frac{dH_z}{dc} \right|^2 \right) dc \tag{14}$$

avec :

$$\begin{aligned} dc &= a \, d\theta \\ \frac{dH_z}{dc} &= \frac{1}{a} \frac{dH_z}{d\theta} \end{aligned} \tag{15}$$

6 - COEFFICIENT D'ATTENUATION

La puissance transportée moyenne est donnée par la relation :

$$\bar{P}(z) = P_o e^{-2\alpha z} \tag{16}$$

D'après cette expression le coefficient d'atténuation est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P_J}{\bar{P}} \tag{17}$$

C'est-à-dire, le coefficient d'atténuation est le rapport de la puissance perdue par effet Joule sur deux fois la puissance transportée moyenne.

En remplaçant les relations (8) et (14) dans l'expression (17), le coefficient d'atténuation s'écrit :

$$\alpha = \frac{1}{2Z} R_s \frac{\ell^2_{mp}}{\gamma K} \frac{\int_c \left(H_z^2 + \frac{\gamma^2}{\ell^4_{mp}} \left| \frac{dH_z}{dc} \right|^2 \right) dc}{\iint_s H_z^2 \, ds} \tag{18}$$

En utilisant le développement du champ magnétique longitudinal H_z en fonctions propres (voir Annexe A) on arrive à l'expression générale de l'atténuation

$$\alpha_{Ne/m} = \frac{R_s}{aZ} \left(1 - \frac{\upsilon^2_{mp}}{K^2 a^2} \right)^{-1/2} \left(\frac{\upsilon^2_{mp}}{K^2 a^2} + \frac{m^2}{\upsilon^2_{mp} - m^2} \right) \tag{19}$$

En remplaçant m et p par 1 dans cette relation on déduit l'atténuation du mode TE_{11} :

$$\alpha_{Ne/m} = \frac{R_s}{aZ} \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{-1/2} \left[\left(\frac{f_c}{f} \right) + \frac{1}{\upsilon^2_{11} - 1} \right] \tag{20}$$

où f_c est la fréquence de coupure du mode TE_{11} donné par la relation suivante

$$f_c = \frac{\upsilon_{11}}{2\pi a \sqrt{\varepsilon \mu}} \tag{21}$$

La figure 2 présente l'atténuation en dB/100 m des quatre premiers modes TE_{11}, TM_{01}, TE_{21} et TE_{01} en fonction de la fréquence pour le guide circulaire WC 109.

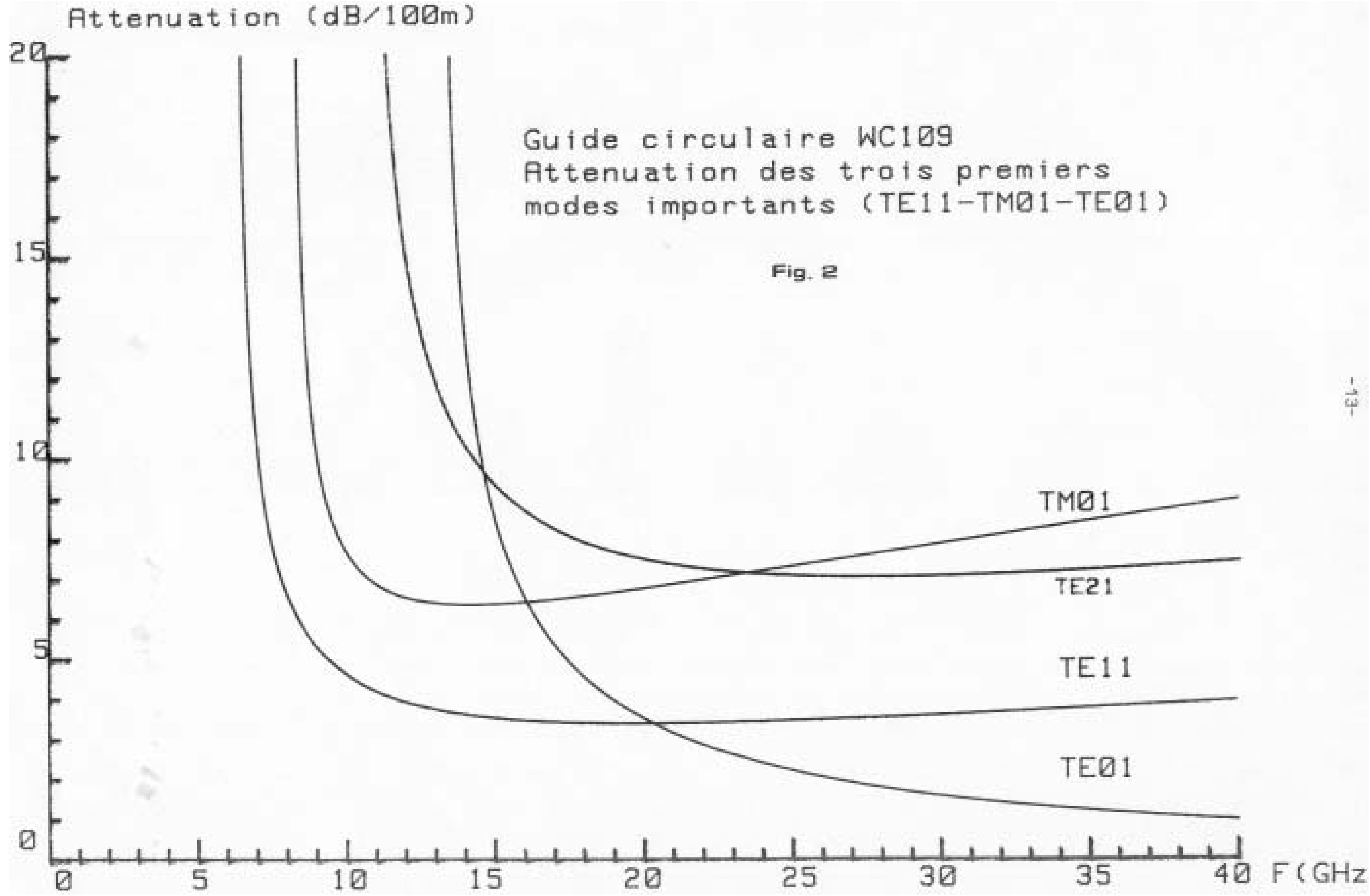

Attenuation (dB/100m)
Guide circulaire WC109
Attenuation des trois premiers
modes importants (TE11-TM01-TE01)
TM01
TE21
TE11
TE01
20
15
10
5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
F(GHz

Fig. 2

CONCLUSION

Le guide circulaire fonctionnant sur son mode fondamental TE_{11} présente donc une atténuation inférieure à 4 dB/ 100 m pour une bande de fréquence comprise entre 10 et 20 GHz, dans le cas du guide WC 109 de diamètre 2,779 cm (fig.2). Mais dans cette bande de fréquence le guide est surdimensionné et d'autres modes sont susceptibles de se propager par couplage avec le mode TE_{11} à la moindre irrégularité de la ligne de transmission. Ainsi la présence des coudes crée des conversions de modes qui vont augmenter l'atténuation de la ligne. Au cours des chapitres suivants nous allons étudier le mécanisme de ces couplages et les conséquences sur la propagation du mode TE_{11}.

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DE PROPAGATION DU MODE TE_{11} DANS UN GUIDE CIRCULAIRE COURBÉ.

Dans le chapitre précédent, on a donné les expressions des composantes du champ électromagnétique du guide rectiligne. Le deuxième chapitre est consacré à l'établissement des équations générales de propagation vérifiées par les modes TE_{mp} ou TM_{mp} susceptibles de se propager dans un guide courbé. Les équations différentielles couplées sont obtenues en utilisant le même développement en modes propres d'une section droite et en tenant compte de la déformation géométrique de la structure.

1 - SYSTEME DE COORDONNEES SERRET-FRENET

Pour étudier un guide en courbure, il est commode d'introduire un système de coordonnées curvilignes dont les éléments métriques tiennent compte de la déformation géométrique.

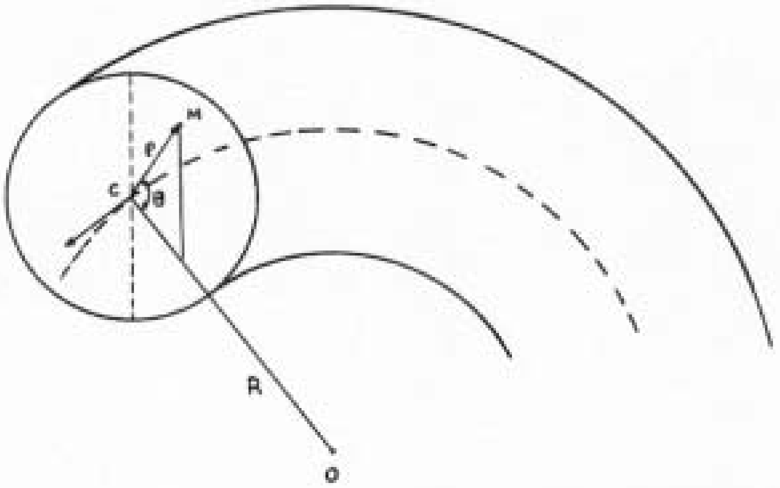


Fig.3

Supposons un guide d'ondes circulaire de rayon intérieur a dont l'axe décrit un arc de circonférence de centre O et de rayon R supposé très supérieur au rayon a Fig. (3). Soit M un point quelconque du guide ; le plan de section droite passant par M coupe l'axe en un point C dont la position est déterminée par l'angle d'ouverture Φ et l'abscisse curviligne $S = R\phi$. Dans le système de coordonnées toroïdales de Serret-Frenet {8,9} (ρ, θ, S) le carré de l'élément d'arc dr est donné par :

$$dr^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(1 - \frac{\rho}{R}\cos\theta\right)^2 ds^2 \qquad (1)$$

et les éléments métriques sont :

$$h_\rho = 1$$

$$h_\theta = \rho \qquad (2)$$

$$h_s = 1 - \frac{\rho}{R}\cos\theta$$

2 - EQUATIONS FONDAMENTALES DES MODES TE_{mp}, TM_{mp}

A l'aide de ces nouvelles coordonnées, les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \text{rot}\,\vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E} \end{aligned} \tag{3}$$

projetées sur le plan transversal, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}_t(h_s E_s)\wedge\vec{u}_s + \vec{u}_s\wedge\frac{\partial\vec{E}_t}{\partial s} &= -j\omega\mu\vec{H}_t \\ \vec{\text{grad}}_t(h_s H_s)\wedge\vec{u}_s + \vec{u}_s\wedge\frac{\partial\vec{H}_t}{\partial s} &= j\omega\varepsilon\vec{E}_t \end{aligned} \tag{4}$$

A partir de ces équations et en utilisant un développement des composantes transversales du champ magnétique et électrique en vecteurs propres et des composantes longitudinales en fonctions propres comme ci-dessous

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(s,t) &= \sum_m\sum_p a_{mp}(s,t)\,\vec{\text{grad}}_t\varphi_{mp} + \sum_m\sum_p b_{mp}(s,t)\,\vec{u}_s\wedge\vec{\text{grad}}_t\psi_{mp} \\ \vec{H}_t(s,t) &= \sum_m\sum_p d_{mp}(s,t)\,\vec{u}_s\wedge\vec{\text{grad}}_t\varphi_{mp} + \sum_m\sum_p \beta_{mp}(s,t)\,\text{grad}_t\psi_{mp} \\ E_s(s,t) &= \sum_m\sum_p c_{mp}(s,t)\,\varphi_{mp} \\ H_s(s,t) &= \sum_m\sum_p \gamma_{mp}(s,t)\,\psi_{mp} \end{aligned} \tag{5}$$

nous obtenons six équations différentielles couplées du premier ordre, ayant pour inconnues les coefficients du développement

Mode TM_{mp}

$$\frac{\partial a_{mp}}{\partial s} + j\frac{k^2-k_{mp}^2}{\omega\varepsilon}d_{mp} = \frac{j\omega\mu}{k_{mp}^2}\iint_S\frac{\rho}{R}\cos\theta\,\vec{H}_t\cdot(\vec{u}_s\wedge\vec{\text{grad}}_t\varphi_{mp})\,ds - \iint_S\frac{\rho}{R}\cos\theta\,E_s\,\varphi_{mp}\,ds \;.$$

$$\frac{\partial d_{mp}}{\partial s} + j\omega\varepsilon\,a_{mp} = \frac{j\omega\varepsilon}{k_{mp}^2}\iint_S\frac{\rho}{R}\cos\theta\,\vec{E}_t\cdot\vec{\text{grad}}_t\varphi_{mp}\,ds \tag{6}$$

$$d_{mp} + \frac{j\omega\varepsilon}{k_{mp}^2}c_{mp} = 0$$

Mode TE_{mp}

$$\frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} - j\frac{k^2-k_{mp}^2}{\omega\gamma} b_{mp} = -\frac{j\omega\varepsilon}{\ell_{mp}^2}\iint_S \frac{\rho}{R}\cos\theta\, \vec{E}_t\cdot(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp})\,ds - \iint_S \frac{\rho}{R}\cos\theta\, H_s \Psi_{mp}\,ds$$

$$\frac{\partial b_{mp}}{\partial s} - j\omega\gamma\,\beta_{mp} = -\frac{j\omega\gamma}{\ell_{mp}^2}\iint_S \frac{\rho}{R}\cos\theta\,\vec{H}_t\cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp}\,ds \qquad (7)$$

$$b_{mp} - \frac{j\omega\gamma}{\ell_{mp}^2}\gamma_{mp} = 0$$

où $K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

K_{mp}, ℓ_{mp} sont les valeurs propres données par les relations suivantes :

$$K_{mp} = \frac{u_{mp}}{a} \quad , \quad \ell_{mp} = \frac{v_{mp}}{a}$$

où u_{mp} est la $p^{ième}$ racine de la fonction $J_m(x)$

et v_{mp} est la $p^{ième}$ racine de la fonction $J'_m(x)$

$\vec{grad}_t\,\phi_{mp}$, $\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t\,\Psi_{mp}$ sont les vecteurs propres de type "électrique",

$\vec{grad}_t\,\Psi_{mp}$, $\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t\,\phi_{mp}$ sont les vecteurs propres de type "magnétique",

et ϕ_{mp}, Ψ_{mp} sont les fonctions propres qui sont données dans l'Annexe (A).

3 - COUPLAGE DES MODES

Le système d'équations précédent est valable pour un mode TE_{mp} ou TM_{mp} quelconque qui se propage dans un guide courbé. Etant donné que la variation azimutale des fonctions propres ϕ_{mp}, Ψ_{mp} est en sin $m\theta$ ou cos $m\theta$ dans le second membre des équations différentielles couplées (6), (7), il apparaît des intégrales de la forme :

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \cos\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi & n=1 \;, m=0 \text{ ou } n=0,\ m=1 \\ \pi/2 & n = m \pm 1 \\ 0 & \text{pour toutes les autres valeurs} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \cos\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi/2 & n = m \pm 1 \\ 0 & \text{pour toutes les autres valeurs} \end{cases}$$

En conséquence la courbure introduit un couplage uniquement entre les modes dont l'indice azimutal diffère de $\pm$ 1, c'est-à-dire qu'un mode de symétrie m ne se couple qu'avec les modes de symétrie m+1 et m-1.

4 - APPLICATION AU MODE TE_{11}

Dans le cas particulier du mode TE_{11} la variation azimutale de la fonction propre ϕ_{11} est soit en $\sin\theta$ soit en $\cos\theta$. On distingue alors les deux cas suivants :

I) Variation azimutale en $\sin\theta$.

Cette variation correspond à un vecteur champ électrique ayant au point C une polarisation rectiligne dans le plan perpendiculaire au plan de symétrie du guide courbé (Fig. 4).

Cette direction de polarisation sera appelée "polarisation perpendiculaire" et notée $E^{\perp}$ par la suite.

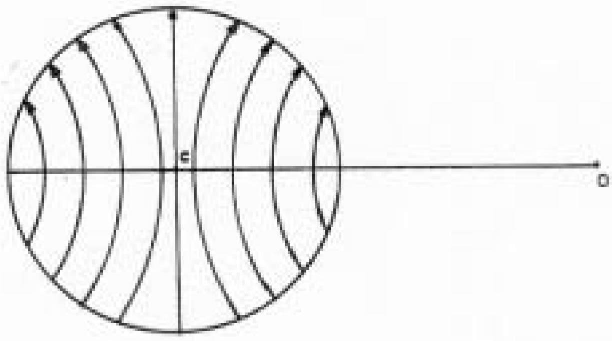


Fig. 4

Le système d'équations différentielles couplées vérifié par les modes TE_{1p} est donné dans l'Annexe D (équations 3). Il a été obtenu après avoir calculé analytiquement les intégrales des seconds membres des équations (6),(7) Les résultats de ces intégrations et des différentes étapes de la résolution sont donnés respectivement dans l'Annexe D (équations 1) et dans l'Annexe C.

Les modes qui se couplent avec le mode TE_{1p} dans le cas de polarisation perpendiculaire au plan de symétrie sont successivement :

$$TE_{1p} \left\{\begin{matrix} TE_{2q} \\ TE_{oq} \\ TM_{2q} \end{matrix}\right\} , \quad TE_{2q} \left\{\begin{matrix} TE_{1p} \\ TE_{3p} \\ TM_{3p} \\ TM_{1p} \end{matrix}\right\} , \quad TE_{oq} \left\{ TE_{1p} \right\} , \quad TM_{2q} \left\{\begin{matrix} TE_{1p} \\ TE_{3p} \\ TM_{1p} \\ TM_{3p} \end{matrix}\right\}$$

$$TE_{3p} \left\{\begin{matrix} TE_{2q} \\ TE_{4q} \\ TM_{2q} \end{matrix}\right\} , \quad TM_{1p} \left\{\begin{matrix} TM_{2q} \\ TE_{2q} \end{matrix}\right\} , \quad TE_{4q} \left\{\begin{matrix} TE_{3p} \\ TM_{3p} \end{matrix}\right\} , \quad TM_{3p} \left\{\begin{matrix} TM_{2q} \\ TE_{2q} \\ TE_{4q} \end{matrix}\right\}$$

II) Variation azimutale en cosθ

Cette variation correspond à un vecteur électrique ayant au point C une polarisation rectiligne dans le plan de symétrie du guide courbé (Fig. **5**).

Cette direction de polarisation sera appelée "polarisation parallèle" et notés $E^{\parallel}$ par la suite.

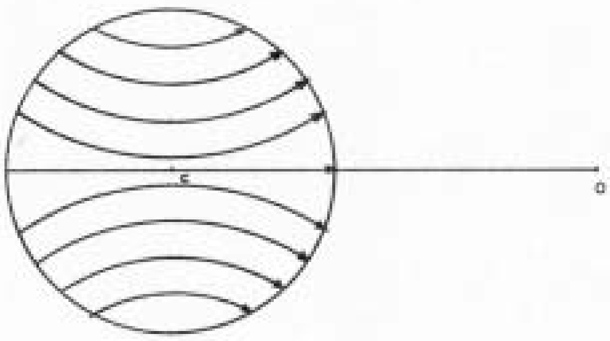


Fig. **5**

Nous obtenons un second système d'équations différentielles couplées donné dans l'Annexe D par les équations (4).

Les mdoes qui se couplent avec le mode TE_{1p} dans le cas de polarisation parallèle au plan de symétrie sont successivement :

$$TE_{1p} \left\{\begin{matrix} TM_{oq} \\ TE_{2q} \\ TM_{2q} \end{matrix}\right\} , \quad TE_{2q} \left\{\begin{matrix} TE_{1p} \\ TE_{3p} \\ TM_{1p} \\ TM_{3p} \end{matrix}\right\} , \quad TM_{oq} \left\{\begin{matrix} TM_{1p} \\ TE_{1p} \end{matrix}\right\} , \quad TM_{2q} \left\{\begin{matrix} TE_{1p} \\ TE_{3p} \\ TM_{1p} \\ TM_{3p} \end{matrix}\right\}$$

$$TE_{3p} \left\{\begin{matrix} TE_{2q} \\ TE_{4q} \\ TM_{2q} \end{matrix}\right\} , \quad TM_{1p} \left\{\begin{matrix} TM_{2q} \\ TM_{oq} \\ TE_{2q} \end{matrix}\right\} , \quad TE_{4q} \left\{\begin{matrix} TE_{3p} \\ TM_{3p} \end{matrix}\right\} , \quad TM_{3p} \left\{\begin{matrix} TM_{2q} \\ TE_{2q} \\ TE_{4q} \end{matrix}\right\}$$

CONCLUSION

Le développement du champ électromagnétique en modes propres d'une section droite injecté dans les équations de Maxwell nous permet d'obtenir le système d'équations différentielles couplées vérifié par les différents modes susceptibles de se propager dans un guide courbé.

Dans le cas du mode TE_{11} la courbure introduit deux directions privilégiées qui sont l'une parallèle au plan de symétrie du guide courbé et l'autre perpendiculaire à ce plan. Selon la direction le mode TE_{11} se couple directement :

- avec les modes TE_{2q}, TE_{oq}, TM_{2q} pour la polarisation $E^{\perp}$
- avec les modes TE_{2q}, TM_{oq}, TM_{2q} pour la polarisation $E^{\parallel}$

D'après les systèmes d'équations différentielles les coefficients de couplage sont fonction de la fréquence normalisée Ka et sont proportionnels au rapport a/R entre le rayon a du guide et la rayon R de courbure.

CHAPITRE III

RÉSOLUTION PAR UNE MÉTHODE DE PERTURBATION.

Dans le chapitre précédent nous avons montré que les coefficients des couplages entre modes sont proportionnels au paramètre a/R. Cette propriété nous autorise à rechercher les coefficients des modes propres sous la forme d'un développement en série entière de ce paramètre. Chaque membre du système d'équations (3), (4) (Annexe D) apparaît alors sous la forme d'un développement en série de a/R. Cette méthode de perturbation fait apparaître dès l'ordre (1) des termes séculaires, c'est-à-dire des termes devenant infinis dans l'expression des champs. Pour éviter l'apparition de tels termes on utilise la méthode de Poincaré {25}. L'identification des termes du même ordre permet alors en principe de déterminer complètement les coefficients du développement en modes propres et ensuite le champ électromagnétique.

1. PRINCIPE DE LA METHODE

Développons les coefficients a_{nq}, α_{nq}, b_{nq}, β_{nq} en série entière suivant les puissances croissantes du paramètre a/R :

$$a_{nq}(s) = a_{nq}^{(o)}(s) + \frac{a}{R} a_{nq}^{(1)}(s) + \frac{a^2}{R^2} a_{nq}^{(2)}(s) + \dots + \frac{a^n}{R^n} a_{nq}^{(n)}(s)$$

$$\alpha_{nq}(s) = \alpha_{nq}^{(o)}(s) + \frac{a}{R} \alpha_{nq}^{(1)}(s) + \frac{a^2}{R^2} \alpha_{nq}^{(2)}(s) + \dots + \frac{a^n}{R^n} \alpha_{nq}^{(n)}(s) \qquad (1)$$

$$b_{nq}(s) = b_{nq}^{(o)}(s) + \frac{a}{R} b_{nq}^{(1)}(s) + \frac{a^2}{R^2} b_{nq}^{(2)}(s) + \dots + \frac{a^n}{R^n} b_{nq}^{(n)}(s)$$

$$\beta_{nq}(s) = \beta_{nq}^{(o)}(s) + \frac{a}{R} \beta_{nq}^{(1)}(s) + \frac{a^2}{R^2} \beta_{nq}^{(2)}(s) + \dots + \frac{a^n}{R^n} \beta_{nq}^{(n)}(s)$$

La détermination des coefficients à l'ordre n est faite en commençant par l'ordre (o), puis par l'ordre (1) et ainsi de suite jusqu'à l'ordre (n). Pour simplifier cette analyse, nous nous sommes limités à l'ordre (2) car à partir de l'ordre (3) les termes du développement sont extrêmement faibles.

Le terme d'ordre (o) du développement est obtenu sans aucune difficulté car il correspond au guide rectiligne. Par contre, dès l'ordre (1), il apparaît dans le second membre des équations différentielles un terme contenant une expression en $\exp(-j\,\gamma_{11}\, S/a)$, ce qui conduit à une solution comprenant un terme infini appelé terme séculaire.

Pour éliminer ces termes séculaires, on utilise une méthode de perturbation plus élaborée inspirée de celle de Poincaré {25} , qui consiste à changer la variable S par une nouvelle variable notée S^* et définie par :

$$S = S^*\left(1 + \frac{a}{R}\eta_1 + \frac{a^2}{R^2}\eta_2 + \dots\right) \qquad (2)$$

où η_1 et η_2 sont des constantes convenablement choisies afin d'empêcher l'apparition de termes séculaires.

2. SYSTEMES A RESOUDRE

En utilisant les développements (1),(2) limités à l'ordre (2) dans les équations (3),(4) de l'Annexe D, nous obtenons un système d'équations différentielles relatif à chaque ordre pour chacune des deux polarisations.

2.1. Polarisation perpendiculaire au plan de symétrie

2.1.1. Approximation d'ordre (o)

A l'approximation d'ordre zéro on est ramené au cas bien connu du guide rectiligne dans lequel ne se propage que le mode TE_{11}. Rappelons rapidement les résultats.

Le système d'équations (3) donné dans l'Annexe (D) se réduit au système suivant :

$$\begin{aligned} a\frac{\partial \beta_{11}^{(o)}}{\partial s^{*}} - \frac{j}{Z_o}\frac{\gamma_{11}^2}{ka} b_{11}^{(o)} &= 0 \\ a\frac{\partial b_{11}^{(o)}}{\partial s^{*}} - jZ_o ka\,\beta_{11}^{(o)} &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} a^2\frac{\partial^2 \beta_{11}^{(o)}}{\partial s^{*2}} + \gamma_{11}^2 \beta_{11}^{(o)} &= 0 \\ a^2\frac{\partial^2 b_{11}^{(o)}}{\partial s^{*2}} + \gamma_{11}^2 b_{11}^{(o)} &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

avec γ_{11} la constante de propagation normalisée par rapport au rayon du guide donnée par la relation :

$$\gamma_{11}^2 = k^2a^2 - \upsilon_{11}^2$$

Les solutions des équations précédentes sont :

$$\beta_{11}^{(o)}(s^*) = \beta_o e^{-j\gamma_{11}s^*/a}$$

$$b_{11}^{(o)}(s^*) = b_o e^{-j\gamma_{11}s^*/a}$$

où b_o et β_o sont des constantes qui représentent respectivement l'amplitude de l'onde incidente du champ électrique et du champ magnétique. Entre ces deux constantes existe la relation :

$$\frac{b_o}{\beta_o} = -Z_o \frac{ka}{\gamma_{11}}$$

où $Z_o = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ l'impédance d'onde et $K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

2.1.2. Approximation d'ordre (1)

Pour l'approximation d'ordre (1), on trouve le système suivant :

$$\left.\begin{aligned}
&a\frac{\partial \beta_{11}^{(1)}}{\partial s^{*}} - \frac{j}{Z_o}\frac{\gamma_{11}^{2}}{ka} b_{11}^{(1)} = \frac{j}{Z_o}\frac{\gamma_{11}^{2}}{ka}\eta_1 b_{11}^{(o)} \\
&a\frac{\partial b_{11}^{(1)}}{\partial s^{*}} - jZ_o ka\,\beta_{11}^{(1)} = jZ_o ka\,\eta_1 \beta_{11}^{(o)}
\end{aligned}\right\} TE_{11}^{(1)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a\frac{\partial a_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*}} + jZ_o\frac{v_{2q}^{2}}{ka}\alpha_{2q}^{(1)} = jZ_o ka F_q \beta_{11}^{(o)} \\
&a\frac{\partial \alpha_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*}} + \frac{j}{Z_o} ka\, a_{2q}^{(1)} = -\frac{j}{Z_o} ka F_q b_{11}^{(o)}
\end{aligned}\right\} TM_{2q}^{(1)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a\frac{\partial \beta_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*}} - \frac{j}{Z_o}\frac{\gamma_{2q}^{2}}{ka} b_{2q}^{(1)} = \frac{j}{Z_o}\frac{f_q}{ka} b_{11}^{(o)} \\
&a\frac{\partial b_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*}} - jZ_o ka\,\beta_{2q}^{(1)} = jZ_o ka\, g_q \beta_{11}^{(o)}
\end{aligned}\right\} TE_{2q}^{(1)} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a\frac{\partial \beta_{oq}^{(1)}}{\partial s^{*}} - \frac{j}{Z_o}\frac{\gamma_{oq}^{2}}{ka} b_{oq}^{(1)} = \frac{j}{Z_o}\frac{e_q}{ka} b_{11}^{(o)} \\
&a\frac{\partial b_{oq}^{(1)}}{\partial s^{*}} - jZ_o ka\,\beta_{oq}^{(1)} = -jZ_o ka\,\beta_{11}^{(o)} h_q
\end{aligned}\right\} TE_{oq}^{(1)}$$

où γ_{nq} et v_{nq} sont respectivement les constantes de propagation normalisées des modes TE_{nq}, TM_{nq} définies par les relations :

$$\gamma_{nq}^{2} = k^2a^2 - v_{nq}^{2}$$

$$v_{nq}^{2} = k^2a^2 - u_{nq}^{2}$$

f_q, F_q, g_q, h_q, e_q sont définies par :

$$
\begin{aligned}
f_q &= \frac{\upsilon_{11}\left[2k^2a^2\left(\upsilon_{11}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{11}^2\right)-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{11}^2\left(4-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{11}^2\right)\right]}{\upsilon_{2q}\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(\upsilon_{11}^2-1\right)\left(\upsilon_{2q}^2-4\right)}} \\
F_q &= \frac{\upsilon_{11}}{u_{2q}\left(u_{2q}^2-\upsilon_{11}^2\right)\sqrt{\upsilon_{11}^2-1}} \\
g_q &= \frac{2\upsilon_{11}\left(\upsilon_{11}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{11}^2\right)}{\upsilon_{2q}\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(\upsilon_{11}^2-1\right)\left(\upsilon_{2q}^2-4\right)}} \\
h_q &= \frac{2\sqrt{2}\,\upsilon_{11}^3}{\left(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{11}^2\right)^2\sqrt{\upsilon_{11}^2-1}} \\
e_q &= \frac{\sqrt{2}\,\upsilon_{11}^3\left(\upsilon_{0q}^2+\upsilon_{11}^2-2k^2a^2\right)}{\left(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{11}^2\right)^2\sqrt{\upsilon_{11}^2-1}}
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Le système différentiel précédent conduit à :

$$
\left.
\begin{aligned}
a^2\frac{\partial^2\beta_{11}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\gamma_{11}^2\beta_{11}^{(1)} &= -2\gamma_{11}^2\eta_1\beta_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a} \\
a^2\frac{\partial^2 b_{11}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\gamma_{11}^2 b_{11}^{(1)} &= -2\gamma_{11}^2\eta_1 b_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a}
\end{aligned}
\right\}\ TE_{11}^{(1)} \qquad (9)
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.
\begin{aligned}
a^2\frac{\partial^2 a_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\upsilon_{2q}^2 a_{2q}^{(1)} &= -\left(\upsilon_{2q}^2+\gamma_{11}^2\right)F_q b_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a} \\
a^2\frac{\partial^2\alpha_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\upsilon_{2q}^2\alpha_{2q}^{(1)} &= 2k^2a^2F_q\beta_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a}
\end{aligned}
\right\}\ TM_{2q}^{(1)} \\
&\left.
\begin{aligned}
a^2\frac{\partial^2\beta_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\gamma_{2q}^2\beta_{2q}^{(1)} &= -\left(f_q+\gamma_{2q}^2 g_q\right)\beta_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a} \\
a^2\frac{\partial^2 b_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\gamma_{2q}^2 b_{2q}^{(1)} &= -\left(f_q+\gamma_{11}^2 g_q\right)b_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a}
\end{aligned}
\right\}\ TE_{2q}^{(1)} \qquad (10) \\
&\left.
\begin{aligned}
a^2\frac{\partial^2\beta_{0q}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\gamma_{0q}^2\beta_{0q}^{(1)} &= -\left(e_q-\gamma_{0q}^2 h_q\right)\beta_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a} \\
a^2\frac{\partial^2 b_{0q}^{(1)}}{\partial s^{*2}}+\gamma_{0q}^2 b_{0q}^{(1)} &= -\left(e_q-\gamma_{11}^2 h_q\right)b_0 e^{-j\gamma_{11}s^*/a}
\end{aligned}
\right\}\ TE_{0q}^{(1)}
\end{aligned}
$$

Dans les solutions des équations (9) apparaissent des termes séculaires. L'élimination de ces termes implique :

$$n_1 = 0$$

Dans ces conditions on retrouve les équations du guide rectiligne pour lequel il n'y a pas de terme d'ordre (1).

En conséquence :

$$b_{11}^{(1)} (S^*) = 0$$

$$\beta_{11}^{(1)} (S^*) = 0$$

" il n'y a donc pas de perturbation d'ordre (1) pour le mode TE_{11} dans le guide courbé". Par contre les équations (7) montrent que *" le mode TE_{11} d'ordre (o) excite les modes TM_{2q}, TE_{2q}, TE_{oq} à l'ordre (1)"* que nous appelerons modes "parasites".

2.1.3. Conditions aux limites

Supposons maintenant que le guide se compose de deux parties rigoureusement rectilignes raccordées par un coude de longueur S_1. Les équations différentielles précédentes sont résolues en utilisant les conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du coude.

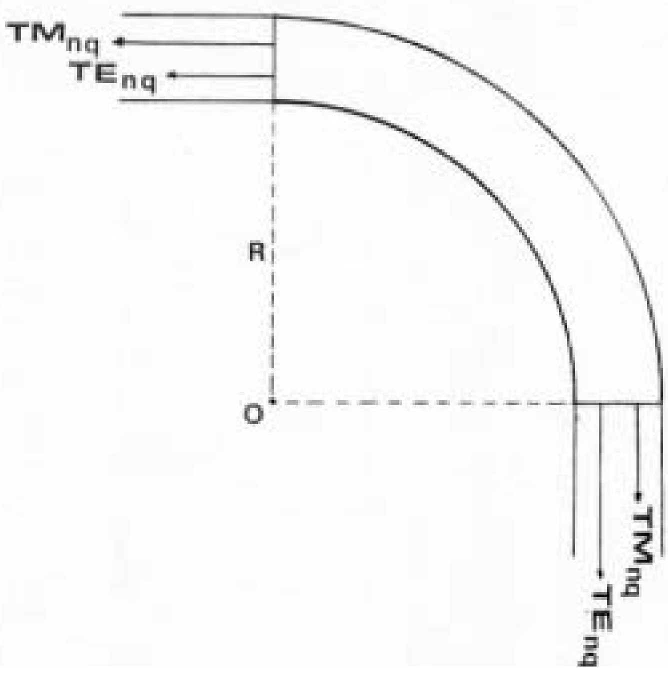


Fig.6

(I) Conditions à l'entrée du coude :

Un mode qui se propage dans la direction de S^* décroissant vérifie à l'entrée du coude les relations :

$$\frac{a_{nq}(0)}{\alpha_{nq}(0)} = -Z_0 \frac{\nu_{nq}}{ka} \qquad \text{pour un mode } TM_{nq} \qquad (12)$$

$$\frac{b_{nq}(0)}{\beta_{nq}(0)} = Z_0 \frac{ka}{\gamma_{nq}} \qquad \text{pour un mode } TE_{nq} \qquad (13)$$

(II) Conditions à la sortie du coude :

Un mode qui se propage dans la direction de S^* croissant vérifie à la sortie du coude les relations :

$$\frac{a_{nq}(S_1^*)}{\alpha_{nq}(S_1^*)} = Z_0 \frac{\nu_{nq}}{ka} \qquad \text{pour un mode } TM_{nq} \qquad (14)$$

$$\frac{b_{nq}(S_1^*)}{\beta_{nq}(S_1^*)} = -Z_0 \frac{ka}{\gamma_{nq}} \qquad \text{pour un mode } TE_{nq} \qquad (15)$$

Autrement dit, à l'entrée du coude, nous avons des ondes réfléchies TM_{nq} TE_{nq} qui sont des modes du guide rectiligne et à la sortie des ondes TM_{nq}, TE_{nq} transmises qui sont également des modes du guide rectiligne.

Ces conditions aux limites permettent de déterminer entièrement les solutions du système d'équations différentielles (10). Les expressions analytiques de ces solutions à l'ordre (1) apparaissent dans l'Annexe E. A partir de ces expressions on peut déterminer l'amplitude des ondes parasites qui apparaissent à l'entrée et à la sortie du coude. Leur amplitude est donnée par les relations (3) de l'Annexe E.

2.1.4. Approximation d'ordre (2)

Pour l'approximation d'ordre (2) on trouve le système suivant :

$$a\frac{\partial \beta_{11}^{(2)}}{\partial s^{\circ}} - \frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{11}^2}{ka}b_{11}^{(2)} = \frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{11}^2}{ka}\eta_2 b_{11}^{(0)} + \frac{j}{Z_0}\sum_q\left\{b_{2q}^{(1)}H_1 + b_{0q}^{(1)}H_2 + a_{2q}^{(1)}E_1\right\}$$

$$a\frac{\partial b_{11}^{(2)}}{\partial s^{\circ}} - jZ_0 ka\,\beta_{11}^{(2)} = jZ_0 ka\,\eta_2\beta_{11}^{(0)} + jZ_0\sum_q\left\{\beta_{2q}^{(1)}H_3 - \beta_{0q}^{(1)}H_4 - \alpha_{2q}^{(1)}E_2\right\} \tag{16}$$

où :

$$H_1 = \frac{v_{2q}\left[2k^2a^2\left(v_{11}^2 + v_{2q}^2 - v_{2q}^2 v_{11}^2\right) - v_{2q}^2 v_{11}^2\left(4 - v_{2q}^2 - v_{11}^2\right)\right]}{ka\,v_{11}\left(v_{2q}^2 - v_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{11}^2 - 1\right)\left(v_{2q}^2 - 4\right)}}$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{2}\,v_{11}v_{0q}^2\left(v_{0q}^2 + v_{11}^2 - 2k^2a^2\right)}{ka\left(v_{0q}^2 - v_{11}^2\right)^2\sqrt{v_{11}^2 - 1}}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{ka\,u_{2q}}{v_{11}\left(u_{2q}^2 - v_{11}^2\right)\sqrt{v_{11}^2 - 1}} \tag{17}$$

$$H_3 = \frac{2ka\,v_{2q}\left(v_{11}^2 + v_{2q}^2 - v_{2q}^2 v_{11}^2\right)}{v_{11}\left(v_{2q}^2 - v_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{11}^2 - 1\right)\left(v_{2q}^2 - 4\right)}}$$

$$H_4 = \frac{2\sqrt{2}\,ka\,v_{11}v_{0q}^2}{\left(v_{0q}^2 - v_{11}^2\right)^2\sqrt{v_{11}^2 - 1}}$$

On a encore les relations suivantes entre les coefficients de couplage des systèmes (7)et (16).

$$H_1 = \frac{1}{ka}\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2}f_q \qquad H_3 = ka\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2}g_q$$

$$H_2 = \frac{1}{ka}\frac{v_{0q}^2}{v_{11}^2}e_q \qquad H_4 = ka\frac{v_{0q}^2}{v_{11}^2}h_q$$

$$E_1 = E_2 = ka\frac{u_{2q}^2}{v_{11}^2}F_q \tag{18}$$

En introduisant les relations (18) dans les équations (16) et en passant aux équations différentielles du second ordre, on obtient :

$$a^2\frac{\partial^2\beta_{11}^{(2)}}{\partial s'^2}+\gamma_{11}^2\beta_{11}^{(2)}=-2\gamma_{11}^2\eta_2\beta_{11}^{(0)}-\sum_q\Big\{\beta_{2q}^{(1)}(f_q+\gamma_{11}^2g_q)\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2}+\beta_{0q}^{(1)}(e_q-\gamma_{11}^2h_q)\frac{v_{0q}^2}{v_{11}^2}-$$

$$-\alpha_{2q}^{(1)}(v_{2q}^2+\gamma_{11}^2)\frac{u_{2q}^2}{v_{11}^2}F_q+\frac{1}{v_{11}^2}\left(v_{2q}^2f_qg_q-v_{0q}^2h_qe_q+k^2a^2F_q^2u_{2q}^2\right)\beta_{11}^{(0)}\Big\}$$

$$a^2\frac{\partial^2 b_{11}^{(2)}}{\partial s'^2}+\gamma_{11}^2b_{11}^{(2)}=-2\gamma_{11}^2\eta_2b_{11}^{(0)}-\sum_q\Big\{b_{2q}^{(1)}(f_q+\gamma_{2q}^2g_q)\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2}+b_{0q}^{(1)}(e_q-\gamma_{0q}^2h_q)\frac{v_{0q}^2}{v_{11}^2}+ \qquad (19)$$

$$+a_{2q}^{(1)}\frac{u_{2q}^2}{v_{11}^2}2k^2a^2F_q+\frac{1}{v_{11}^2}\left(v_{2q}^2f_qg_q-v_{0q}^2e_qh_q+k^2a^2F_q^2u_{2q}^2\right)b_{11}^{(0)}\Big\}$$

L'élimination de termes séculaires nous permet d'avoir l'expression du coefficient η_2

$$\eta_2=\frac{1}{2v_{11}^2\gamma_{11}^2}\sum_q\Big\{\frac{v_{0q}^2h_q^2}{\gamma_{0q}^2-\gamma_{11}^2}\left(\frac{e_q^2}{h_q^2}-2\frac{e_q}{h_q}\gamma_{11}^2+\gamma_{11}^2\gamma_{0q}^2\right)+\frac{v_{2q}^2g_q^2}{\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2}\left(\frac{f_q^2}{g_q^2}+2\frac{f_q}{g_q}\gamma_{11}^2+\gamma_{11}^2\gamma_{2q}^2\right)+$$

$$+\frac{u_{2q}^2k^2a^2F_q^2}{v_{2q}^2-\gamma_{11}^2}\left(v_{2q}^2+3\gamma_{11}^2\right)\Big\} \qquad (20)$$

Le système précédent devient :

$$a^2\frac{\partial^2\beta_{11}^{(2)}}{\partial s'^2}+\gamma_{11}^2\beta_{11}^{(2)}=-\frac{1}{v_{11}^2}\sum_q\Big\{v_{2q}^2(f_q+\gamma_{11}^2g_q)\beta_{2q}'^{(1)}+v_{0q}^2(e_q-\gamma_{11}^2h_q)\beta_{0q}'^{(1)}-u_{2q}^2F_q(v_{2q}^2+\gamma_{11}^2)\alpha_{2q}'^{(1)}\Big\}$$

$$(21)$$

$$a^2\frac{\partial^2 b_{11}^{(2)}}{\partial s'^2}+\gamma_{11}^2b_{11}^{(2)}=-\frac{1}{v_{11}^2}\sum_q\Big\{v_{2q}^2(f_q+\gamma_{2q}^2g_q)b_{2q}'^{(1)}+v_{0q}^2(e_q-\gamma_{0q}^2h_q)b_{0q}'^{(1)}+2k^2a^2u_{2q}^2F_q\,a_{2q}'^{(1)}\Big\}$$

avec $\beta'^{(1)}_{2q}(S^*)$, $b'^{(1)}_{2q}(S^*)$, $\beta'^{(1)}_{oq}(S^*)$, $b'^{(1)}_{oq}(S^*)$, $a'^{(1)}_{2q}(S^*)$, $\alpha'^{(1)}_{2q}(S^*)$ sont les solutions des équations homogènes relatives à chacun de ces coefficients. Ceux-ci sont donnés par les relations (5) de l'Annexe E. En reportant ces relations dans le système (21) et en utilisant les mêmes conditions aux limites on trouve les solutions d'ordre (2) pour l'onde réfléchie et transmise du mode TE_{11}. Ces solutions sont données dans l'Annexe (F) par les relations (1).

En changeant la variable S_1^* par S_1 d'après la relation :

$$S_1^* = \frac{S_1}{1 + \frac{a^2}{R^2}\eta_2} \tag{22}$$

on fait apparaître la constante de propagation $\gamma^{\perp}_{11}$ de ce mode dans le coude :

$$\gamma^{\perp}_{11} = \frac{\gamma_{11}}{1 + \frac{a^2}{R^2}\eta_2} \tag{23}$$

D'après le développement (1) la solution complète pour le mode TE_{11} est donnée à l'entrée du coude par :

$$b^{\perp}_{11}(0) = \frac{a^2}{R^2} b_o \, Q^{\perp}_q(ka) \tag{24}$$

et à la sortie :

$$b^{\perp}_{11}(s_1) = b_o\left[1 + \frac{a^2}{R^2} T^{\perp}_q(ka)\right] e^{-j\gamma^{\perp}_{11} s_1/a} \tag{25}$$

où $Q^{\perp}_q$, $T^{\perp}_q$ fonctions de la fréquence normalisée ka données dans l'Annexe (G) par les relations (1).

2.2. Polarisation parallèle au plan de symétrie

2.2.1. Approximation d'ordre (o) et (1)

Dans le cas de polarisation parallèle nous avons suivi le même processus que pour la polarisation perpendiculaire. Nous avons posé :

$$S = S^{\circ}\left(1 + \frac{a}{R}\xi_1 + \frac{a^2}{R^2}\xi_2 + \dots\right)$$

L'élimination des termes séculaires qui apparaissent à l'ordre (1) conduit à :

$$\xi_1 = 0$$

ce qui implique " *l'absence de perturbation d'ordre (1) du mode* TE_{11} *dans le guide courbé* ". Par contre, à partir des équations (4) de l'Annexe D, on trouve que " *le mode* TE_{11} *d'ordre (o) excite les modes parasites* TE_{2q}, TM_{oq}, TM_{2q} *à l'ordre (1)* " selon les équations :

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{\partial a_{2q}^{(1)}}{\partial s^{\circ}} + jZ_0\frac{v_{2q}^2}{ka}\alpha_{2q}^{(1)} &= -jZ_0\, ka\, F_q\, \beta_{11}^{(0)}\\
a\frac{\partial \alpha_{2q}^{(1)}}{\partial s^{\circ}} + \frac{j}{Z_0}\, ka\, a_{2q}^{(1)} &= \frac{j}{Z_0}\, ka\, F_q\, b_{11}^{(0)}
\end{aligned}\right\} \quad TM_{2q}$$

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{\partial \beta_{2q}^{(1)}}{\partial s^{\circ}} - \frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{2q}^2}{ka} b_{2q}^{(1)} &= \frac{j}{Z_0}\frac{f_q}{ka} b_{11}^{(0)}\\
a\frac{\partial b_{2q}^{(1)}}{\partial s^{\circ}} - jZ_0\, ka\, \beta_{2q}^{(1)} &= jZ_0\, ka\, g_q\, \beta_{11}^{(0)}
\end{aligned}\right\} \quad TE_{2q} \qquad (28)$$

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{\partial a_{0q}^{(1)}}{\partial s^{\circ}} + jZ_0\frac{v_{0q}^2}{ka}\alpha_{0q}^{(1)} &= -jZ_0\, ka\, d_q\, \beta_{11}^{(0)}\\
a\frac{\partial \alpha_{0q}^{(1)}}{\partial s^{\circ}} + \frac{j}{Z_0}\, ka\, a_{0q}^{(1)} &= \frac{j}{Z_0}\, ka\, d_q\, b_{11}^{(0)}
\end{aligned}\right\} \quad TM_{0q}$$

avec f_q, F_q, g_q coefficients donnés par les relations (8) et d_q donné par :

$$d_q = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_{11}}{u_{0q}\left(u_{0q}^2 - \sigma_{11}^2\right)\sqrt{\sigma_{11}^2 - 1}} \qquad (29)$$

A partir des équations (28) on obtient les équations différentielles du second ordre :

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \dfrac{\partial^2 a_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}} + \nu_{2q}^2 a_{2q}^{(1)} = \left(\nu_{2q}^2 + \gamma_{11}^2\right) F_q\, b_0\, e^{-j\gamma_{11} s^*/a} \\[2ex] a^2 \dfrac{\partial^2 \alpha_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}} + \nu_{2q}^2 \alpha_{2q}^{(1)} = -2K^2 a^2 F_q\, \beta_0\, e^{-j\gamma_{11} s^*/a} \end{array}\right\} \quad TM_{2q}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \dfrac{\partial^2 \beta_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}} + \gamma_{2q}^2 \beta_{2q}^{(1)} = -\left(f_q + \gamma_{2q}^2 g_q\right) \beta_0\, e^{-j\gamma_{11} s^*/a} \\[2ex] a^2 \dfrac{\partial^2 b_{2q}^{(1)}}{\partial s^{*2}} + \gamma_{2q}^2 b_{2q}^{(1)} = -\left(f_q + \gamma_{11}^2 g_q\right) b_0\, e^{-j\gamma_{11} s^*/a} \end{array}\right\} \quad TE_{2q} \qquad (30)$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \dfrac{\partial^2 a_{0q}^{(1)}}{\partial s^{*2}} + \nu_{0q}^2 a_{0q}^{(1)} = \left(\nu_{0q}^2 + \gamma_{11}^2\right) d_q\, b_0\, e^{-j\gamma_{11} s^*/a} \\[2ex] a^2 \dfrac{\partial^2 \alpha_{0q}^{(1)}}{\partial s^{*2}} + \nu_{0q}^2 \alpha_{0q}^{(1)} = -2K^2 a^2 d_q\, \beta_0\, e^{-j\gamma_{11} s^*/a} \end{array}\right\} \quad TM_{0q}$$

Les conditions aux limites appliquées aux équations (30) permettent d'obtenir leurs solutions. Les expressions analytiques de ces solutions à l'ordre (1) apparaissent dans l'Annexe E. A partir de ces expressions, on peut déterminer l'amplitude des ondes réfléchie et transmise des modes parasites, à l'entrée et à la sortie du coude. Leur amplitude est donnée par les relations (4) dans l'Annexe E.

2.2.2. Approximation d'ordre (2)

Pour l'approximation d'ordre (2) on a le système suivant :

$$a \frac{\partial \beta_{11}^{(2)}}{\partial s^*} - \frac{j}{Z_0} \frac{\gamma_{11}^2}{ka} b_{11}^{(2)} = \frac{j}{Z_0} \frac{\gamma_{11}^2}{ka} \xi_2 b_{11}^{(0)} + \frac{j}{Z_0} \sum_q \left\{ b_{2q}^{(1)} H_1 - a_{2q}^{(1)} E_1 - a_{0q}^{(1)} E_0 \right\}$$

$$a \frac{\partial b_{11}^{(2)}}{\partial s^*} - j Z_0 ka\, \beta_{11}^{(2)} = j Z_0 ka\, \xi_2 \beta_{11}^{(0)} + j Z_0 \sum_q \left\{ \beta_{2q}^{(1)} H_3 + \alpha_{2q}^{(1)} E_2 + \alpha_{0q}^{(1)} E_3 \right\} \qquad (31)$$

où

$$H_1 = \frac{\upsilon_{2q}\left[2K^2a^2\left(\upsilon_{11}^2 + \upsilon_{2q}^2 - \upsilon_{2q}^2\upsilon_{11}^2\right) - \upsilon_{2q}^2\upsilon_{11}^2\left(4 - \upsilon_{2q}^2 - \upsilon_{11}^2\right)\right]}{ka\, \upsilon_{11}\left(\upsilon_{2q}^2 - \upsilon_{11}^2\right)^2 \sqrt{\left(\upsilon_{11}^2 - 1\right)\left(\upsilon_{2q}^2 - 4\right)}}$$

$$H_3 = \frac{2ka\, \upsilon_{2q}\left(\upsilon_{11}^2 + \upsilon_{2q}^2 - \upsilon_{2q}^2\upsilon_{11}^2\right)}{\upsilon_{11}\left(\upsilon_{2q}^2 - \upsilon_{11}^2\right)^2 \sqrt{\left(\upsilon_{11}^2 - 1\right)\left(\upsilon_{2q}^2 - 4\right)}}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{ka\, u_{2q}}{\upsilon_{11}\left(u_{2q}^2 - \upsilon_{11}^2\right)\sqrt{\upsilon_{11}^2 - 1}} \quad , \quad E_0 = E_3 = \frac{\sqrt{2}\, ka\, u_{0q}}{\upsilon_{11}\left(u_{0q}^2 - \upsilon_{11}^2\right)\sqrt{\upsilon_{11}^2 - 1}} \qquad (32)$$

avec :

$$H_1 = \frac{1}{ka}\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2} f_q$$

$$H_2 = ka\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2} g_q \tag{33}$$

$$E_1 = E_2 = ka\frac{u_{2q}^2}{v_{11}^2} F_q \quad , \quad E_0 = E_3 = ka\frac{u_{0q}^2}{v_{11}^2} d_q$$

En introduisant les relations (33) dans les équations (31) et en passant aux équations différentielles du second ordre on obtient :

$$a^2\frac{\partial^2 \beta_{11}^{(2)}}{\partial s'^2} + \gamma_{11}^2 \beta_{11}^{(2)} = -2\gamma_{11}^2 \xi_2 \beta_{11}^{(0)} - \sum_q \Big\{ \beta_{2q}^{(1)}\left(f_q + \gamma_{11}^2 g_q\right)\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2} + \alpha_{2q}^{(1)}\left(\nu_{2q}^2 + \gamma_{11}^2\right)\frac{u_{2q}^2}{v_{11}^2} F_q +$$

$$+ \alpha_{0q}^{(1)}\left(\nu_{0q}^2 + \gamma_{11}^2\right)\frac{u_{0q}^2}{v_{11}^2} d_q + \frac{1}{v_{11}^2}\left(v_{2q}^2 f_q g_q + k^2a^2u_{2q}^2F_q^2 + k^2a^2u_{0q}^2 d_q^2\right)\beta_{11}^{(0)}\Big\}$$

$$a^2\frac{\partial^2 b_{11}^{(2)}}{\partial s'^2} + \gamma_{11}^2 b_{11}^{(2)} = -2\gamma_{11}^2 \xi_2 b_{11}^{(0)} - \sum_q \Big\{ b_{2q}^{(1)}\left(f_q + \gamma_{2q}^2 g_q\right)\frac{v_{2q}^2}{v_{11}^2} - a_{2q}^{(1)}\, 2\,\frac{u_{2q}^2}{v_{11}^2} k^2a^2 F_q - \tag{34}$$

$$- a_{0q}^{(1)}\, 2\,\frac{u_{0q}^2}{v_{11}^2} k^2a^2 d_q + \frac{1}{v_{11}^2}\left(v_{2q}^2 f_q g_q + k^2a^2u_{2q}^2F_q + k^2a^2u_{0q}^2 d_q\right) b_{11}^{(0)}\Big\}$$

L'élimination de termes séculaires nous permet d'avoir l'expression du coefficient ξ_2 :

$$\xi_2 = \frac{1}{2v_{11}^2\gamma_{11}^2}\sum_q \Big\{ \frac{k^2a^2u_{2q}^2F_q^2}{\nu_{2q}^2 - \gamma_{11}^2}\left(\nu_{2q}^2 + 3\gamma_{11}^2\right) + \frac{k^2a^2u_{0q}^2 d_q^2}{\nu_{0q}^2 - \gamma_{11}^2}\left(\nu_{0q}^2 + 3\gamma_{11}^2\right) + \tag{35}$$

$$+ \frac{v_{2q}^2 g_q^2}{\gamma_{2q}^2 - \gamma_{11}^2}\left(\frac{f_q^2}{g_q^2} + 2\frac{f_q}{g_q}\gamma_{11}^2 + \gamma_{11}^2\gamma_{2q}^2\right)\Big\}$$

Le système précédent devient alors :

$$a^2 \frac{\partial^2 \beta_{11}^{(2)}}{\partial s^{*2}} + \gamma_{11}^2 \beta_{11}^{(2)} = -\frac{1}{v_{11}^2} \sum_q \left\{ v_{2q}^2 \left(f_q + \gamma_{11}^2 g_q\right) \beta_{2q}^{\prime(1)} + u_{2q}^2 F_q \left(v_{2q}^2 + \gamma_{11}^2\right) \alpha_{2q}^{\prime(1)} + u_{0q}^2 d_q \left(v_{0q}^2 + \gamma_{11}^2\right) \alpha_{0q}^{\prime(1)} \right\}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 b_{11}^{(2)}}{\partial s^{*2}} + \gamma_{11}^2 b_{11}^{(2)} = -\frac{1}{v_{11}^2} \sum_q \left\{ v_{2q}^2 \left(f_q + \gamma_{2q}^2 g_q\right) b_{2q}^{\prime(1)} - 2k^2a^2 u_{2q}^2 F_q a_{2q}^{\prime(1)} - 2k^2a^2 u_{0q}^2 d_q a_{0q}^{\prime(1)} \right\} \tag{36}$$

où $\beta_{2s}^{\prime(1)}(S^*)$, $b_{2q}^{\prime(1)}(S^*)$, $a_{2q}^{\prime(1)}(S^*)$, $\alpha_{2q}^{\prime(1)}(S^*)$, $a_{0q}^{\prime(1)}(S^*)$, $a_{0q}^{\prime(1)}(S^*)$ sont respectivement les solutions des équations homogènes relatives à chacun de ces coefficients. Ceux-ci sont donnés par les relations (6) de l'Annexe E.

Pour la constante de propagation ainsi que pour les ondes TE_{11} réfléchie et transmise on trouve les relations similaires à celles obtenues pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie :

$$\gamma_{11}'' = \frac{\gamma_{11}}{1 + \frac{a^2}{R^2}\xi_2} \tag{37}$$

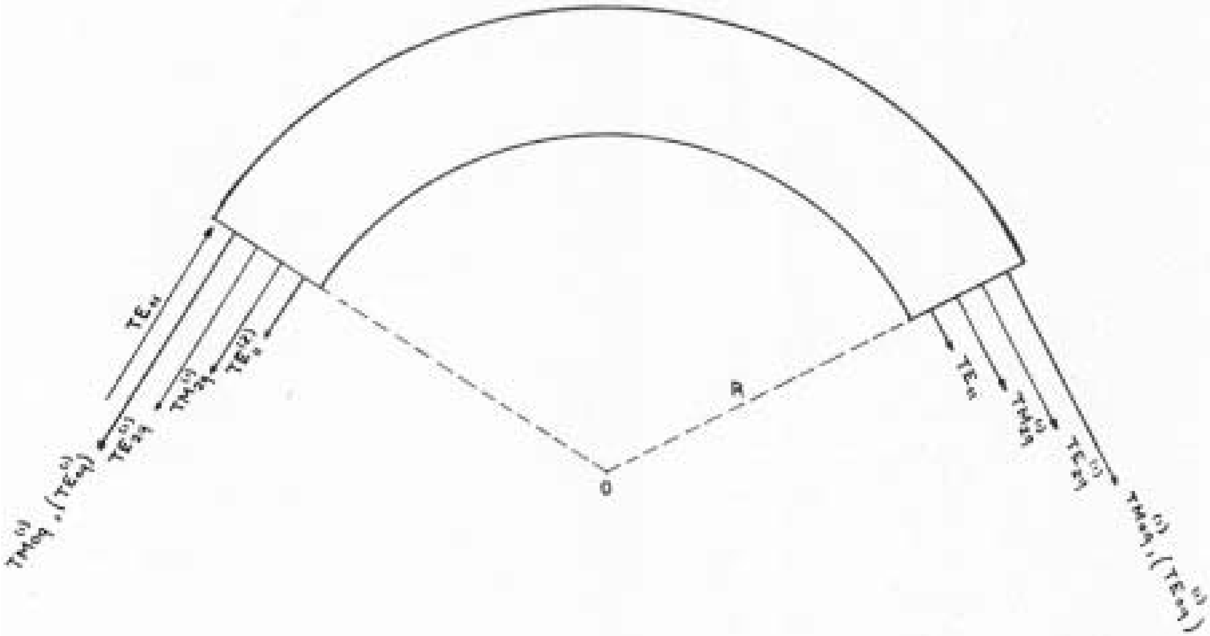
$$b_{11}''(0) = \frac{a^2}{R^2} b_0 Q_q''(ka) \tag{38}$$

$$b_{11}''(s_1) = b_0 \left[1 + \frac{a^2}{R^2} T_q''(ka)\right] e^{-j\gamma_{11}'' s_1/a} \tag{39}$$

où $Q^{\#}_q$, $T^{\#}_q$ sont aussi fonctions de la fréquence normalisée Ka données dans l'Annexe G par les relations (2).

3. RELATIONS ENERGETIQUES

Un bilan énergétique peut être effectué en calculant le flux du vecteur de Poynting sortant de la surface constituée par le guide courbé, fermé par ses sections d'entrée et de sortie (Fig. 7).



- Fig. 7 -

La conservation de l'énergie s'exprime par la relation :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_S \left(\vec{E}_{t_T}\wedge\vec{H}^{*}_{t_T}\right)\cdot\vec{u}_s\,ds-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_S \left(\vec{E}_{t_R}\wedge\vec{H}^{*}_{t_R}\right)\cdot\vec{u}_s\,ds = \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_S \left(\vec{E}_{t_I}\wedge\vec{H}^{*}_{t_I}\right)\cdot\vec{u}_s\,ds$$

Les indices T,R et I désignent respectivement les ondes transmise, réfléchie et incidente.

La première intégrale représente la puissance totale transmise, transportée par le mode TE_{11} et par les modes parasites d'ordre (1).

La deuxième intégrale représente la puissante totale réfléchie, transportée par les modes parasites d'ordre (1). La puissance réfléchie transportée par le mode TE_{11} a été négligée car elle est d'ordre (4).

L'intégrale du second membre représente la puissance incidente transportée par le mode TE_{11} à l'entrée du coude.

On a alors les relations énergétiques suivantes pour chacune des deux polarisations :

$$\frac{1}{2} \mathrm{Re} \iint_S (\vec{E}_{t_T} \wedge \vec{H}^*_{t_T}) \cdot \vec{u}_s \, ds = \begin{cases} P''_T(TE^{(1)}_{2q}) + P''_T(TM^{(1)}_{oq}) + P''_T(TM^{(1)}_{2q}) + P''_T(TE_{11}) \\ \\ P^{\perp}_T(TE^{(1)}_{2q}) + P^{\perp}_T(TE^{(1)}_{oq}) + P^{\perp}_T(TM^{(1)}_{2q}) + P^{\perp}_T(TE_{11}) \end{cases} \quad (41)$$

$$\frac{1}{2} \mathrm{Re} \iint_S (\vec{E}_{t_R} \wedge \vec{H}^*_{t_R}) \cdot \vec{u}_s \, ds = \begin{cases} P''_R(TE^{(1)}_{2q}) + P''_R(TM^{(1)}_{oq}) + P''_R(TM^{(1)}_{2q}) \\ \\ P^{\perp}_R(TE^{(1)}_{2q}) + P^{\perp}_R(TE^{(1)}_{oq}) + P^{\perp}_R(TM^{(1)}_{2q}) \end{cases}$$

Dans ces expressions, un terme tel que $P''_T(TE^{(1)}_{2q})$ désigne la puissance transmise à travers le coude et transportée par le mode TE_{2q} d'ordre (1) pour la polarisation parallèle au plan de symétrie du coude.

Afin de simplifier les expressions on a considéré que la puissance transportée par le mode TE_{11} est normalisée à l'unité à l'entrée du coude :

$$\frac{1}{2} \mathrm{Re} \iint_S (\vec{E}_{t_I} \wedge \vec{H}^*_{t_I}) \cdot \vec{u}_s \, ds = P_I(TE_{11}) = 1$$

L'expression du développement du champ électromagnétique en modes propres dont les coefficients ont été déterminés précédemment, ainsi que les relations d'orthogonalité données dans l'Annexe A permettent de calculer les expressions des puissances réfléchie et transmise relatives à chaque mode. Ce calcul est présenté dans l'Annexe H qui comporte en outre une vérification à l'ordre (2) de la conservation de l'énergie.

4. ETUDE DE DEUX COUDES DE LONGUEUR S_1 SEPARES PAR UN TRONCON DE GUIDE DE LONGUEUR L

L'étude théorique limitée à un coude de longueur S_1 peut être généralisée au cas de structures plus complexes comprenant des coudes successifs dans plusieurs plans séparés par des tronçons de guide de longueur quelconques.

Nous nous sommes limités au cas de deux coudes successifs ayant les mêmes caractéristiques géométriques (rayon de courbure et longueur identiques). Les deux coudes sont séparés par un tronçon de guide rectiligne de longueur L variable. De plus nous avons considéré le cas le plus défavorable où les deux coudes se trouvent dans le même plan.

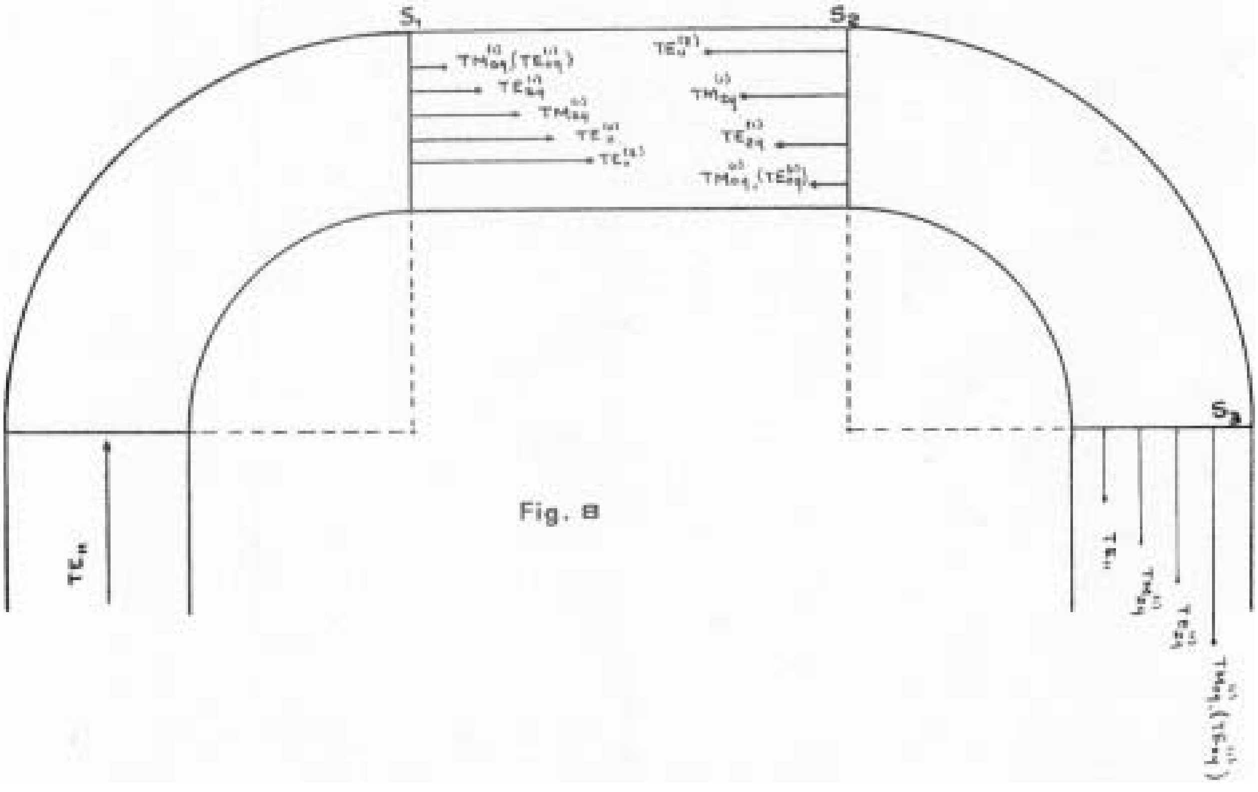


Fig. 8

Nous avons montré dans les paragraphes précédents qu'à la sortie du premier coude nous avons des modes "parasites" d'ordre (1) et le mode TE_{11}. Pour ce dernier, nous avons montré que son amplitude est obtenue par la superposition d'une onde TE_{11} d'ordre (o) et d'une onde TE_{11} d'ordre (2). Ces modes, après avoir parcouru le tronçon du guide, pénètrent dans le deuxième coude.

Dans ce deuxième coude nous avons donc des ondes transmises qui sont la superposition des modes "parasites" dûs au premier coude et des modes parasites qui sont excités dans le deuxième coude par le mode TE_{11} d'ordre (o).

Les ondes réfléchies des modes "parasites" après avoir parcouru le tronçon du guide dans le sens inverse excitent dans le premier coude le mode TE_{11} d'ordre (2).

A la sortie du deuxième coude l'amplitude du mode TE_{11} est donc modifiée et peut être décomposée de la manière suivante :

. un terme d'ordre (o) correspondant à l'approximation du guide rectiligne

. un terme d'ordre (2) excité par les modes parasites d'ordre (1) du premier coude

. un terme d'ordre (2) excité par les modes parasites d'ordre (1) du deuxième coude

. un terme d'ordre (2) provenant du premier coude excité par les modes parasites d'ordre (1) réfléchis dans le deuxième coude.

Pour trouver les solutions d'ordre (2) du mode TE_{11}, il suffit alors de résoudre les systèmes d'équations différentielles (10) et (30) vérifiés par les modes parasites d'ordre (1), en modifiant les conditions aux limites à la sortie du premier coude et à l'entrée du deuxième. Ces conditions pour les modes d'ordre (1) sont données par les relations suivantes :

I. <u>Conditions à la sortie du premier coude</u>

$$a_{nq}^{(1)}(s_1^*) - Z_0 \frac{\nu_{nq}}{ka} \alpha_{nq}^{(1)}(s_1^*) = 2A_R(s_2^*)\, e^{-j\nu_{nq} L/a} \qquad \text{pour un mode } TM_{nq}^{(1)}$$

$$b_{nq}^{(1)}(s_1^*) + Z_0 \frac{ka}{\gamma_{nq}} \beta_{nq}^{(1)}(s_1^*) = 2B_R(s_2^*)\, e^{-j\gamma_{nq} L/a} \qquad \text{pour un mode } TE_{nq}^{(1)} \qquad (42)$$

A_R et B_R sont respectivement l'amplitude de l'onde réfléchie du mode $TM_{nq}^{(1)}$ et $TE_{nq}^{(1)}$ à l'entrée du deuxième coude.

II. Conditions à l'entrée du deuxième coude

$$a_{nq}^{(1)}(S_2^{\circ}) + Z_0 \frac{\nu_{nq}}{ka} \alpha_{nq}^{(1)}(S_2^{\circ}) = 2A_T(S_1^{\circ}) e^{-j\nu_{nq}L/a}$$ pour un mode $TM_{nq}^{(1)}$

(43)

$$b_{nq}^{(1)}(S_2^{\circ}) - Z_0 \frac{ka}{\gamma_{nq}} \beta_{nq}^{(1)}(S_2^{\circ}) = 2B_T(S_1^{\circ}) e^{-j\gamma_{nq}L/a}$$ pour un mode $TE_{nq}^{(1)}$

A_T et B_T sont respectivement l'amplitude de l'onde transmise du mode $TM_{nq}^{(1)}$ et $TE_{nq}^{(1)}$ à la sortie du premier coude

Les solutions obtenues d'ordre (1) injectées ensuite dans les équations différentielles (21) et (36) permettent d'en déduire les solutions d'ordre (2) du mode TE_{11}.

Les résultats obtenus sont des relations similaires à celles obtenues pour la polarisation parallèle et la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie, dans le cas d'un seul coude :

$$b_{11}^{\perp}(S_3) = b_0\left[1 + \frac{a^2}{R^2} S^{\perp}(ka, L)\right] e^{-2j\gamma_{11}^{\perp} S_1/a} e^{-j\gamma_0 L/a} \tag{44}$$

$$b_{11}^{/\!/}(S_3) = b_0\left[1 + \frac{a^2}{R^2} S^{/\!/}(ka, L)\right] e^{-2j\gamma_{11}^{/\!/} S_1/a} e^{-j\gamma_0 L/a} \tag{45}$$

Avec $S^{\perp}$ et $S^{/\!/}$ fonctions de la fréquence normalisée et de longueur L du tronçon du guide données dans l'Annexe F par les relations (3) et (4).

CONCLUSION

La méthode de perturbation appliquée aux coefficients du développement en modes propres permet de ramener ce problème à la résolution de systèmes d'équations dont les seconds membres sont connus pour chaque ordre en a/R en fonction des solutions des ordres précédents. Ces systèmes deviennent rapidement complexes et nous nous sommes limités à l'ordre (2).

La présence des termes séculaires a nécessité l'utilisation de la méthode de Poincaré. L'annulation de ces termes permet le calcul des coefficients du polynôme intervenant dans la variable modifiée S^*. Ainsi on trouve que le coefficient en a/R est nul, ce qui traduit l'absence de perturbation d'ordre (1) du mode TE_{11} dans le guide courbé.

La méthode de Poincaré traduit l'influence de la perturbation de la structure à la fois sur l'amplitude du mode TE_{11} et la constante de propagation.

Au cours de cette étude nous avons montré que les constantes de propagation à l'intérieur du coude, suivant les deux directions privilégiées du mode TE_{11} sont différentes ainsi que leurs coefficients de transmission.

CHAPITRE IV

RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE MATRICIELLE

La méthode de perturbation exposée dans le chapitre précédent conduit à des expressions analytiques permettant de déduire l'influence de la courbure sur la propagation du mode TE_{11}. La validité de ces expressions limitées à l'ordre (2) est directement liée à la valeur du rapport a/R choisie comme paramètre de perturbation et à celle de la fréquence de fonctionnement. Ainsi, il nous a paru nécessaire d'entreprendre la vérification des principaux résultats analytiques : constante de propagation dans le guide et énergie transmise par la méthode matricielle, qui permet de résoudre numériquement un système de n équations différentielles couplées linéaires et homogènes à n inconnues. On a limité dans notre cas le nombre n d'équations à 18 pour la polarisation perpendiculaire et à 20 pour la polarisation parallèle au plan de symétrie.

1. PRINCIPE DE LA METHODE

Soit le système d'équations différentielles écrit sous la forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial S} \{X\} = \{A\} \{X\} \quad (1)$$

La matrice colonne $\{X\}$ représente les coefficients du développement en modes propres que nous voulons déterminer et la matrice $\{A\}$ les coefficients de couplage.

On cherche des solutions particulières du système (1) ayant la forme suivante :

$$\{X\} = \{Y\} \; e^{j\lambda S} \quad (2)$$

$\{Y\}$ sont les vecteurs propres de la matrice $\{A\}$ associés aux valeurs propres λ .

La résolution du problème se ramène à la recherche des valeurs propres λ et des vecteurs propres associés $\{Y\}$, d'une matrice non symétrique réelle ou complexe. La solution générale du système sera donc une combinaison linéaire de ces solutions particulières. Les constantes linéaires arbitraires introduites sont déterminées à partir des conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du coude (Annexe I).

2. ALGORITHMES UTILISES

Pour la résolution du problème de valeurs propres on a utilisé la méthode de Danilevski {**35**} qui transforme une matrice réelle quelconque en une autre matrice dite de "Frobénius" (Annexe J). Cette méthode permet d'obtenir le polynôme caractéristique de la matrice. Les racines de ce polynôme, recherchées à l'aide de la méthode de Bairstow données dans l'Annexe K, sont les valeurs propres de la matrice $\{A\}$.

Soit donc λ_o une valeur propre calculée par la méthode de Danilevski, qui est une approximation de la valeur λ que l'on désire déterminer. Après avoir calculé la matrice $(\{A\} - \lambda_o \; \{I\})$ on a un système linéaire à résoudre de la forme :

$$(\{A\} - \lambda_o \{I\}) \{V_{k+1}\} = \{Y_k\} \quad (3)$$

avec {I} la matrice unitaire {Y} un vecteur connu et {V} un vecteur inconnu. Pour la résolution de ce système, on applique l'algorithme de la puissance itérée dont le principe est donné dans l'Annexe L. Cette méthode nous permet d'obtenir la valeur propre exacte λ et le vecteur propre associé.

Pour effectuer le calcul des constantes arbitraires {C} de la combinaison linéaire des solutions particulières, on introduit les conditions aux limites et on aboutit à un système de la forme :

$$\{D\} \ \{C\} = \{B\} \tag{4}$$

Ces conditions aux limites sont les mêmes que celles utilisées pour la méthode de perturbation. Etant donné que le déterminant Δ de la matrice {D} est différent de zéro, la matrice $\{D\}^{-1}$ inverse de la matrice {D} existe et en multipliant à gauche par $\{D\}^{-1}$, on obtient la solution {C} sous la forme :

$$\{C\} = \{D\}^{-1} \ \{B\} \tag{5}$$

L'organigramme de la méthode de résolution numérique est représenté dans la figure (**9**).

3. SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Dans le cas de la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie du coude, nous avons appliqué cette méthode numérique à un système d'équations différentielles limité à 18 équations, déduit directement à partir du système (3) de l'Annexe D. Les modes qui apparaissent dans ces équations sont les suivants :

$$TE_{11},\ TE_{21},\ TE_{01},\ TM_{11},\ TE_{31},\ TM_{21},\ TE_{41},\ TE_{12},\ TM_{31}.$$

Ces modes ont été choisis d'après l'ordre d'apparition des fréquences de coupure jusqu'à une fréquence normalisée ka = 6,4. Cette valeur par exemple correspond pour le guide circulaire classique WC 109 à 22 GHz.

Pour la polarisation parallèle au plan de symétrie du coude nous avons limité le système différentiel à 20 équations comprenant les modes suivants :

TE_{11}, TM_{01}, TE_{21}, TM_{11}, TE_{31}, TM_{21}, TE_{41}, TE_{12}, TM_{02}, TM_{31}

Les deux systèmes sont donnés par les équations (4) et (5). Les expressions des coefficients de couplage qui apparaissent dans ces systèmes sont donnés dans l'Annexe L.

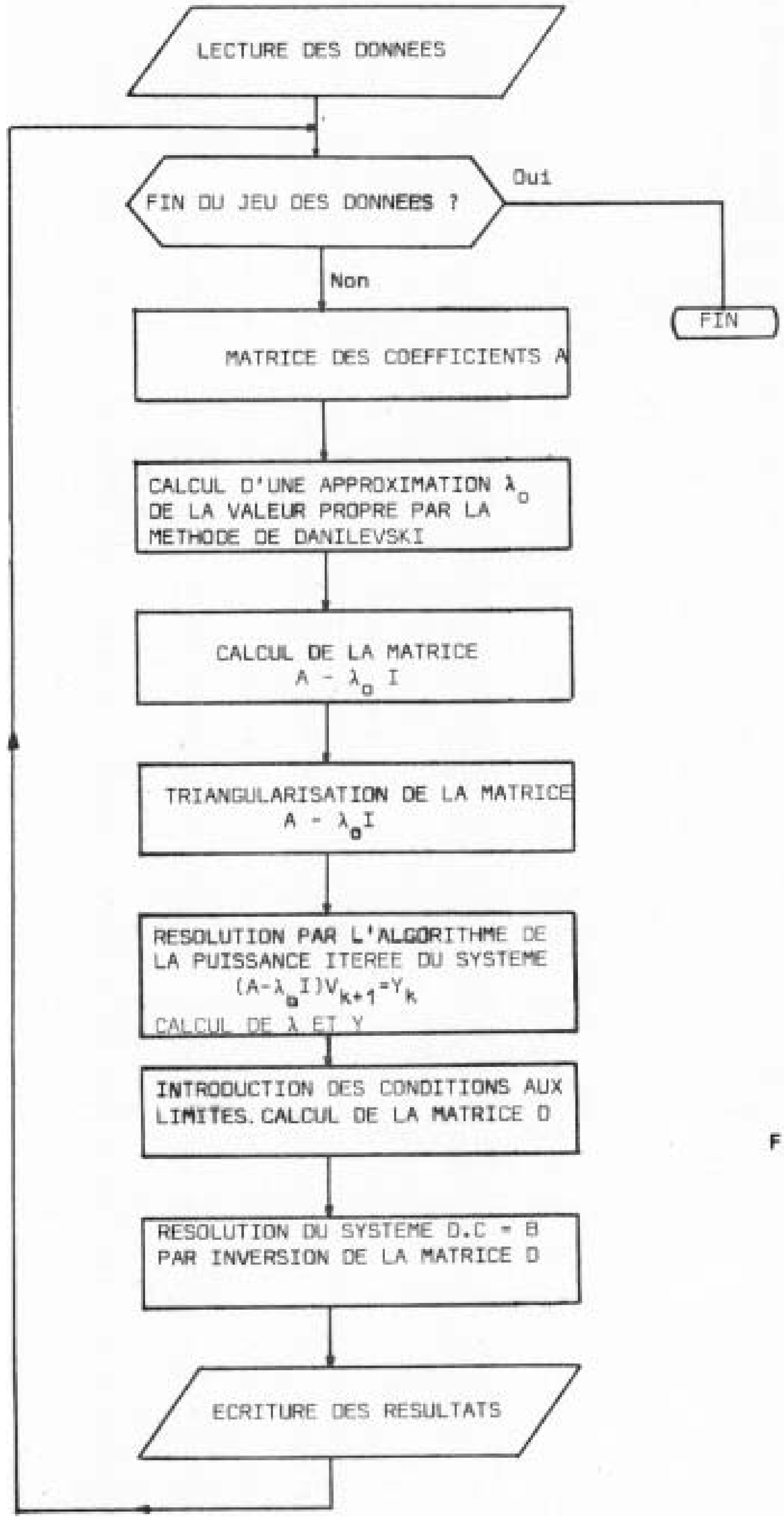

LECTURE DES DONNEES
FIN DU JEU DES DONNEES ?
Oui
FIN
Non
MATRICE DES COEFFICIENTS A
CALCUL D'UNE APPROXIMATION λ_o DE LA VALEUR PROPRE PAR LA METHODE DE DANILEVSKI
CALCUL DE LA MATRICE $A - \lambda_o I$
TRIANGULARISATION DE LA MATRICE $A - \lambda_o I$
RESOLUTION PAR L'ALGORITHME DE LA PUISSANCE ITEREE DU SYSTEME $(A-\lambda_o I)V_{k+1}=Y_k$
CALCUL DE λ ET Y
INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES. CALCUL DE LA MATRICE D
RESOLUTION DU SYSTEME D.C = B PAR INVERSION DE LA MATRICE D
ECRITURE DES RESULTATS

Fig. 9

POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} &= L_1 b_{11} + H_1 b_{21} + H_2 b_{01} + E_1 a_{21}\\ \frac{\partial b_{11}}{\partial s} &= L_2 \beta_{11} + H_3 \beta_{21} + H_4 \beta_{01} + E_2 \alpha_{21}\end{aligned}\right\} \text{TE}_1$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{21}}{\partial s} &= L_3 b_{21} + H_5 b_{11} + H_6 b_{31} + E_3 a_{11} + H_7 b_{12} + E_4 a_{31}\\ \frac{\partial b_{21}}{\partial s} &= L_4 \beta_{21} + H_8 \beta_{11} + H_9 \beta_{31} + E_5 \alpha_{11} + H_{10} \beta_{12} + E_6 \alpha_{31}\end{aligned}\right\} \text{TE}_2$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial s} &= L_5 b_{01} + H_{11} b_{11} + H_{12} b_{12}\\ \frac{\partial b_{01}}{\partial s} &= L_6 \beta_{01} + H_{13} \beta_{11} + H_{14} \beta_{12}\end{aligned}\right\} \text{TE}_0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial s} &= K_1 a_{11} + E_7 a_{21} + H_{15} b_{21}\\ \frac{\partial a_{11}}{\partial s} &= K_2 \alpha_{11} + E_8 \alpha_{21} + H_{16} \beta_{21}\end{aligned}\right\} \text{TM}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{31}}{\partial s} &= L_7 b_{31} + H_{17} b_{21} + H_{18} b_{41} + E_9 a_{21}\\ \frac{\partial b_{31}}{\partial s} &= L_8 \beta_{31} + H_{19} \beta_{21} + H_{20} \beta_{41} + E_{10} \alpha_{21}\end{aligned}\right\} \text{TE}_3$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{21}}{\partial s} &= K_3 a_{21} + E_{11} a_{11} + E_{12} a_{31} + H_{21} b_{11} + H_{22} b_{31} + H_{23} b_{12}\\ \frac{\partial a_{21}}{\partial s} &= K_4 \alpha_{21} + E_{13} \alpha_{11} + E_{14} \alpha_{31} + H_{24} \beta_{11} + H_{25} \beta_{31} + H_{26} \beta_{12}\end{aligned}\right\} \text{TM}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{41}}{\partial s} &= L_9 b_{41} + H_{27} b_{31} + E_{15} a_{31}\\ \frac{\partial b_{41}}{\partial s} &= L_{10} \beta_{41} + H_{28} \beta_{31} + E_{16} \alpha_{31}\end{aligned}\right\} \text{TE}_4$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{12}}{\partial s} &= L_{11} b_{12} + H_{29} b_{21} + H_{30} b_{01} + E_{17} a_{21}\\ \frac{\partial b_{12}}{\partial s} &= L_{12} \beta_{12} + H_{31} \beta_{21} + H_{32} \beta_{01} + E_{18} \alpha_{21}\end{aligned}\right\} \text{TE}_1$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{31}}{\partial s} &= K_5 a_{31} + E_{19} a_{21} + H_{33} b_{21} + H_{34} b_{41}\\ \frac{\partial a_{31}}{\partial s} &= K_6 \alpha_{31} + E_{20} \alpha_{21} + H_{35} \beta_{21} + H_{36} \beta_{41}\end{aligned}\right\} \text{TM}$$

Eq. (4)

POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} &= L_1 b_{11} + H_1 b_{31} + E_1 a_{01} + E_2 a_{02} + E_3 a_{21} \\
\frac{\partial b_{11}}{\partial s} &= L_2 \beta_{11} + H_2 \beta_{31} + E_4 \alpha_{01} + E_5 \alpha_{02} + E_6 \alpha_{21}
\end{aligned}\right\} TE_{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{01}}{\partial s} &= K_1 a_{01} + E_7 a_{11} + H_3 b_{11} + H_4 b_{12} \\
\frac{\partial a_{01}}{\partial s} &= K_2 \alpha_{01} + E_8 \alpha_{11} + H_5 \beta_{11} + H_6 \beta_{12}
\end{aligned}\right\} TM_{01}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{21}}{\partial s} &= L_3 b_{21} + H_7 b_{11} + H_8 b_{31} + E_9 a_{11} + H_9 b_{12} + E_{10} a_{31} \\
\frac{\partial b_{21}}{\partial s} &= L_4 \beta_{21} + H_{10} \beta_{11} + H_{11} \beta_{31} + E_{11} \alpha_{11} + H_{12} \beta_{12} + E_{12} \alpha_{31}
\end{aligned}\right\} TE_{21}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial s} &= K_3 a_{11} + H_{13} b_{21} + E_{13} a_{01} + E_{14} a_{21} + E_{15} a_{02} \\
\frac{\partial a_{11}}{\partial s} &= K_4 \alpha_{11} + H_{14} \beta_{21} + E_{16} \alpha_{01} + E_{17} \alpha_{21} + E_{18} \alpha_{02}
\end{aligned}\right\} TM_{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{31}}{\partial s} &= L_5 b_{31} + H_{15} b_{21} + H_{16} b_{41} + E_{19} a_{21} \\
\frac{\partial b_{31}}{\partial s} &= L_6 \beta_{31} + H_{17} \beta_{21} + H_{18} \beta_{41} + E_{20} \alpha_{21}
\end{aligned}\right\} TE_{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{21}}{\partial s} &= K_5 a_{21} + E_{21} a_{11} + E_{22} a_{31} + H_{19} b_{11} + H_{20} b_{31} + H_{21} b_{12} \\
\frac{\partial a_{21}}{\partial s} &= K_6 \alpha_{21} + E_{23} \alpha_{11} + E_{24} \alpha_{31} + H_{22} \beta_{11} + H_{23} \beta_{31} + H_{24} \beta_{12}
\end{aligned}\right\} TM_{21}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{41}}{\partial s} &= L_7 b_{41} + H_{25} b_{31} + E_{25} a_{31} \\
\frac{\partial b_{41}}{\partial s} &= L_8 \beta_{41} + H_{26} \beta_{31} + E_{26} \alpha_{31}
\end{aligned}\right\} TE_{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{12}}{\partial s} &= L_9 b_{12} + H_{27} b_{21} + E_{27} a_{21} + E_{28} a_{01} + E_{29} a_{02} \\
\frac{\partial b_{12}}{\partial s} &= L_{10} \beta_{12} + H_{28} \beta_{21} + E_{30} \alpha_{21} + E_{31} \alpha_{01} + E_{32} \alpha_{02}
\end{aligned}\right\} TE_{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{02}}{\partial s} &= K_7 a_{02} + E_{33} a_{11} + H_{29} b_{11} + H_{30} b_{12} \\
\frac{\partial a_{02}}{\partial s} &= K_8 \alpha_{02} + E_{34} \alpha_{11} + H_{31} \beta_{11} + H_{32} \beta_{12}
\end{aligned}\right\} TM_{02}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{31}}{\partial s} &= K_9 a_{31} + E_{35} a_{21} + H_{33} b_{21} + H_{34} b_{41} \\
\frac{\partial a_{31}}{\partial s} &= K_{10} \alpha_{31} + E_{36} \alpha_{21} + H_{35} \beta_{21} + H_{36} \beta_{41}
\end{aligned}\right\} TM_{31}$$

Eq.(5)

CONCLUSION

La méthode matricielle destinée surtout à tester la validité de la méthode de perturbation nous oblige à écrire un grand nombre d'équations différentielles. Les coefficients de couplage entre les différents modes pris en compte, donnés par les intégrales sur la section du guide ont été déterminées analytiquement. Ce calcul d'intégrales n'est possible que si le nombre des modes est relativement faible. Nous l'avons effectué pour des approximations à 9 modes pour la polarisation perpendiculaire et 10 modes pour la polarisation parallèle au plan de symétrie.

CHAPITRE V

COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES - EXPLOITATION DES RÉSULTATS OBTENUS.

Dans le chapitre précédent on a présenté la méthode numérique permettant la résolution d'un système d'équations différentielles. Le programme de calcul mis au point se révèle très efficace puisqu'il permet de déterminer rapidement toutes les caractéristiques électromagnétiques d'un coude.

Dans la première partie de ce dernier chapitre, nous avons comparé les résultats obtenus par la méthode de perturbation et par la méthode matricielle pour les principales caractéristiques électromagnétiques d'un coude.

Cette comparaison nous a permis de déterminer la validité des expressions analytiques obtenues par la méthode de perturbation et les limites d'utilisation.

La deuxième partie est consacrée à l'exploitation numérique des expressions analytiques de la méthode de perturbation. Ces études ont porté sur l'évolution des pertes additionnelles, l'ondulation du temps de propagation de groupe, la diaphonie dans le cas du transport de deux polarisations, à la sortie des coudes d'angle d'ouverture de 90° pour des rayons de courbure différents. Comme application, on a considéré le guide circulaire classique WC 109 ayant un diamètre de 2,779 cm.

1 - COMPARAISON DE LA METHODE MATRICIELLE ET DE LA METHODE DE PERTURBATION

1.1. Constante de propagation

La méthode de perturbation nous a permis de donner l'expression analytique de la constante de propagation dans un coude. Rappelons que dans le cas de la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie celle-ci est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{11}^{\perp} = \frac{\gamma_{11}}{1 + \frac{a^2}{R^2}\eta_2} \qquad (1)$$

et dans le cas de la polarisation parallèle au plan de symétrie la constante de propagation modifiée est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{11}^{\parallel} = \frac{\gamma_{11}}{1 + \frac{a^2}{R^2}\xi_2} \qquad (2)$$

avec η_2 et ξ_2 les coefficients en a^2/R^2 du développement par la méthode de Poincaré.

Etant donné que le rapport a/R reste très faible, les constantes de propagation diffèrent très peu de celles du guide rectiligne. Pour qu'on puisse avoir une idée de cette différence, l'écart relatif entre la constante de propagation du guide courbé et la constante de propagation du guide rectiligne est présenté en fonction de la fréquence normalisée ka sur la figure (10) pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie et sur la figure (11) pour la polarisation parallèle au plan de symétrie. Les paramètres géométriques du coude sont : angle d'ouverture 90° et rayons de courbure variant de 50 cm à 100 cm pour le guide circulaire WC 109 (2a = 2,779 cm).

Pour la polarisation perpendiculaire (fig.10) la concordance des résultats entre les deux méthodes est parfaite jusqu'à ka = 6 pour tous les rayons de courbure choisis.

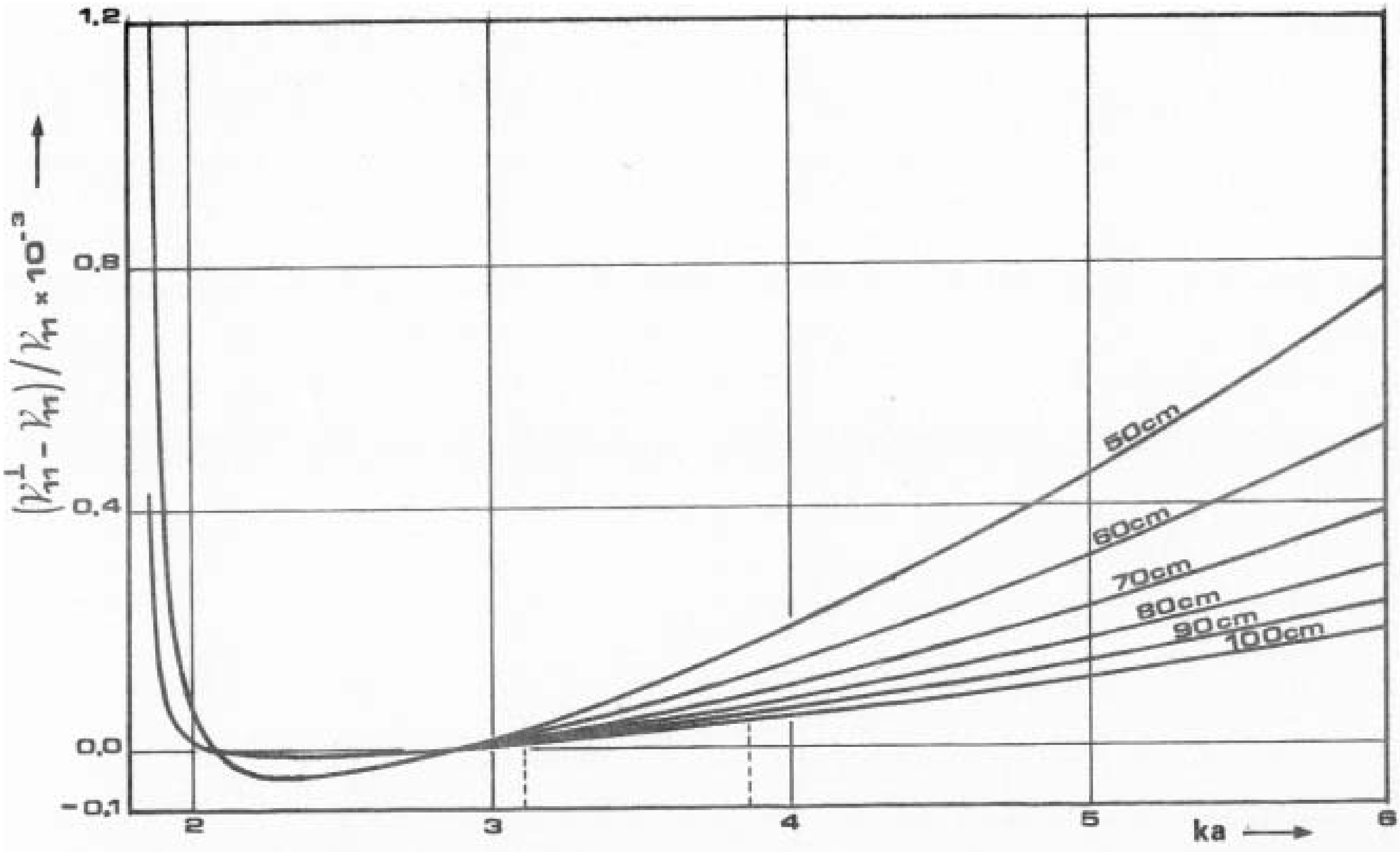


Fig.10 - Ecart relatif de la constante de propagation en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie.

—— méthode de perturbation

---- méthode matricielle.

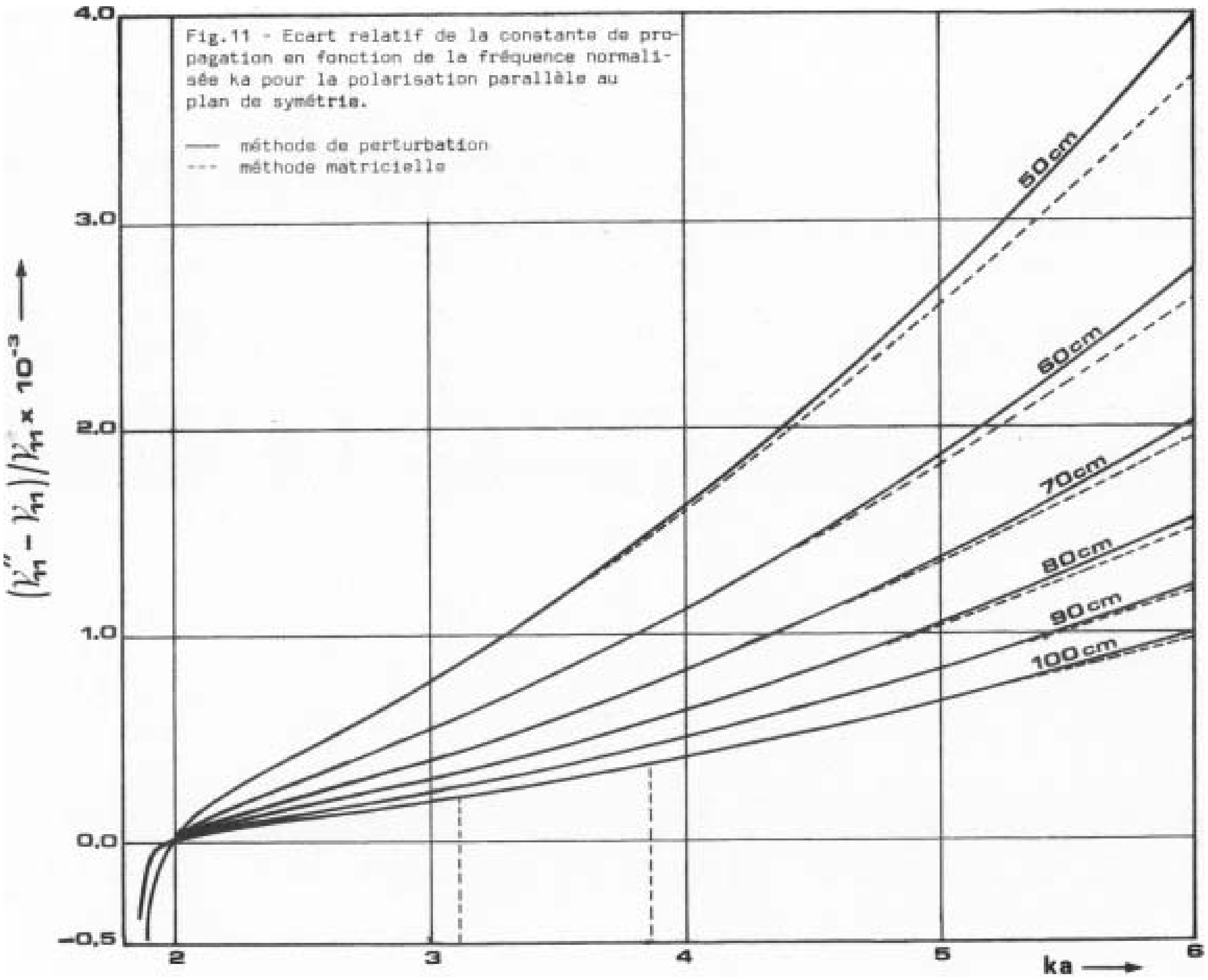


Fig.11 - Ecart relatif de la constante de propagation en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation parallèle au plan de symétrie.

— méthode de perturbation
--- méthode matricielle

Pour la polarisation parallèle (fig. 11) l'écart entre les deux méthodes diminue au fur et à mesure que le rayon de courbure R augmente. Pour la bande de fréquence entre ka = 3,11 et 3,86 (qui correspond à la bande passante utile comprise entre 10,7 GHz et 13,25 GHz) le désaccord reste acceptable (de l'ordre de 1,2 %) pour un rayon de courbure R=50 cm. Pour des rayons supérieurs à celui-ci, la concordance entre les deux méthodes est parfaite dans cette bande de fréquence.

1.2. Relations énergétiques

D'après la méthode de perturbation, rappelons que le rapport de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie d'un coude sur la puissance transportée par le même mode à l'entrée du coude est donné par les relations suivantes pour les deux polarisations :

$$\left(\frac{P_t}{P_i}\right)^{\perp} = 1 + 2\frac{a^2}{R^2} \mathrm{Re}\left\{ T_q^{\perp}(ka) \right\} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{P_t}{P_i}\right)^{\prime\prime} = 1 + 2\frac{a^2}{R^2} \mathrm{Re}\left\{ T_q^{\prime\prime}(ka) \right\} \qquad (4)$$

Les courbes des figures (12) à (19) présentent l'évolution de ce rapport calculé d'après les relations (3) et (4) en fonction de la fréquence normalisée ka à la sortie d'un coude à 90° pour des rayons de courbure différents du guide circulaire WC 109.

Pour la polarisation parallèle et pour R = 50 cm (fig.12) le désaccord entre les deux méthodes reste acceptable (moins de 1 %) jusqu'à ka = 3,92. Si nous augmentons R, l'écart entre les deux méthodes diminue. Par exemple pour R = 100 cm (fig.17), les courbes obtenues sont confondues jusqu'à ka = 3,98. L'écart devient plus important après cette valeur mais le désaccord reste acceptable jusqu'à ka = 5,4.

Pour la polarisation perpendiculaire et pour un rayon de courbure de 50 cm (fig. 18) la concordance des résultats est parfaite jusqu'à ka = 4,86. Le désaccord entre les deux méthodes reste acceptable jusqu'à ka = 6,32. Pour un rayon de courbure R = 100 cm (fig. 19) les résultats obtenus sont quasiment parfaits jusqu'à ka = 6,8.

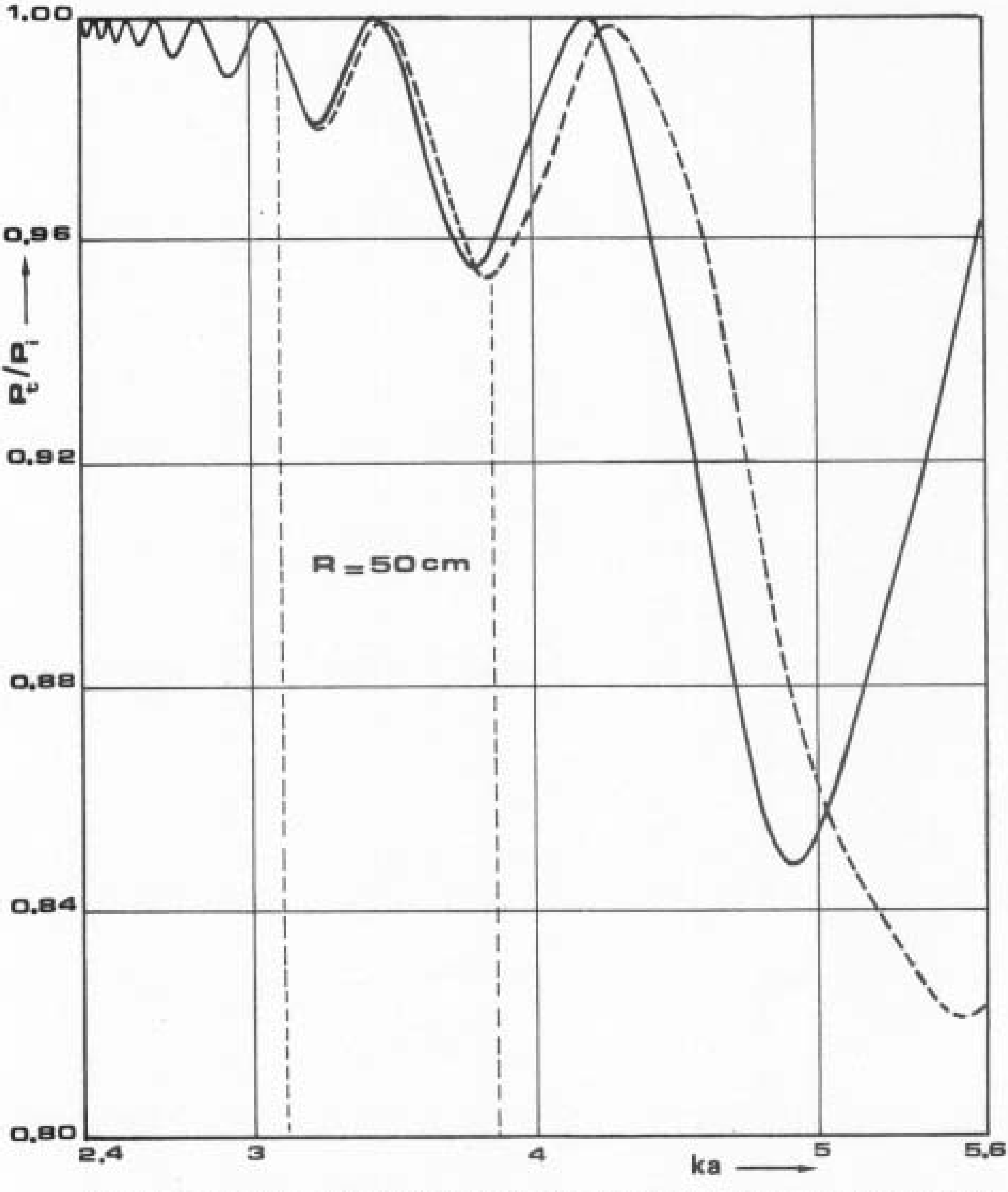


Fig.12 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation parallèle

Paramètres géométriques : coude à 90° R = 50 cm 2a = 2,779 cm

—— méthode de perturbation
---- méthode matricielle

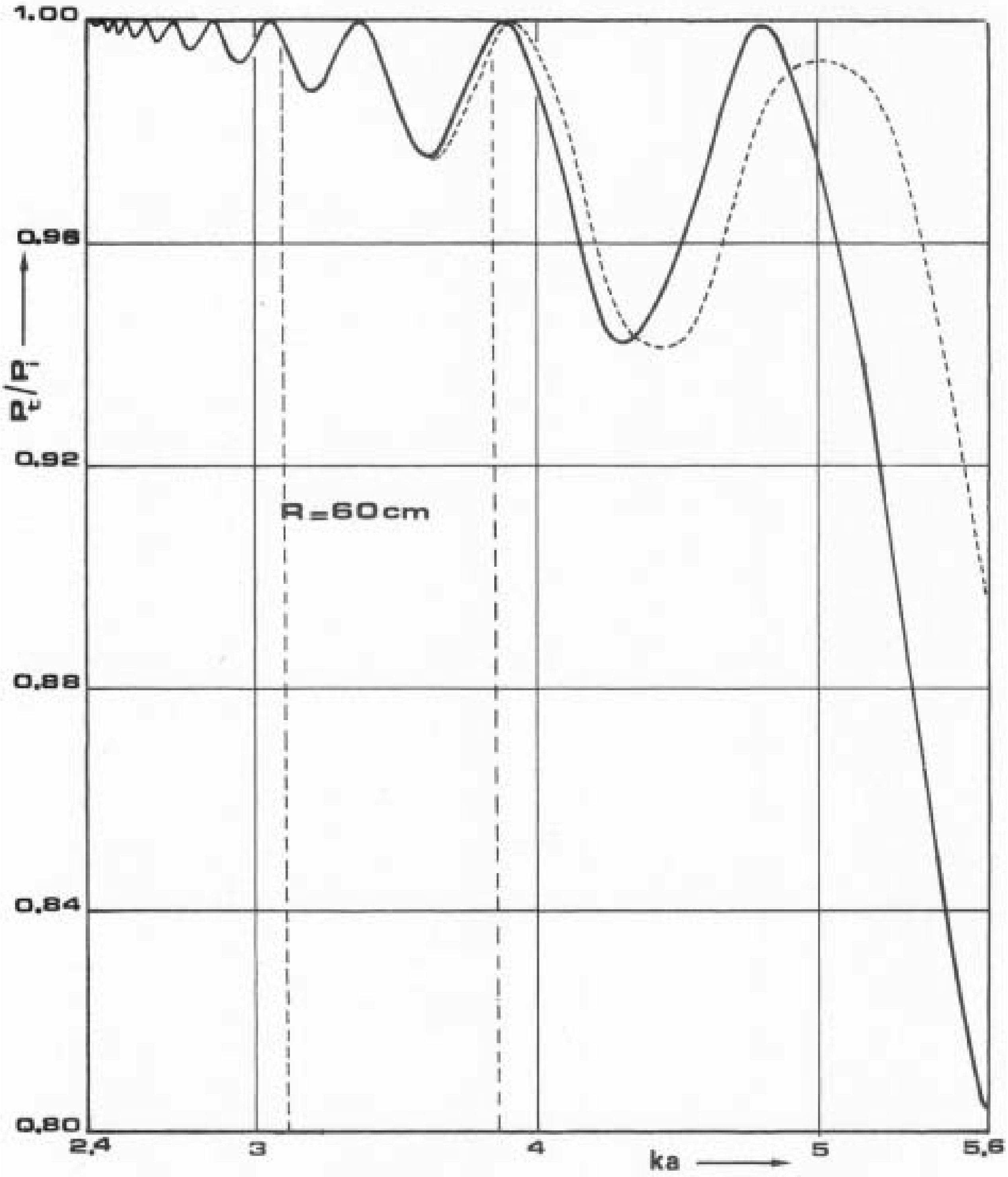


Fig. 13 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation parallèle
Paramètres géométriques : coude à 90° R = 60 cm 2a = 2,779 cm

—— méthode de perturbation
--- méthode matricielle.

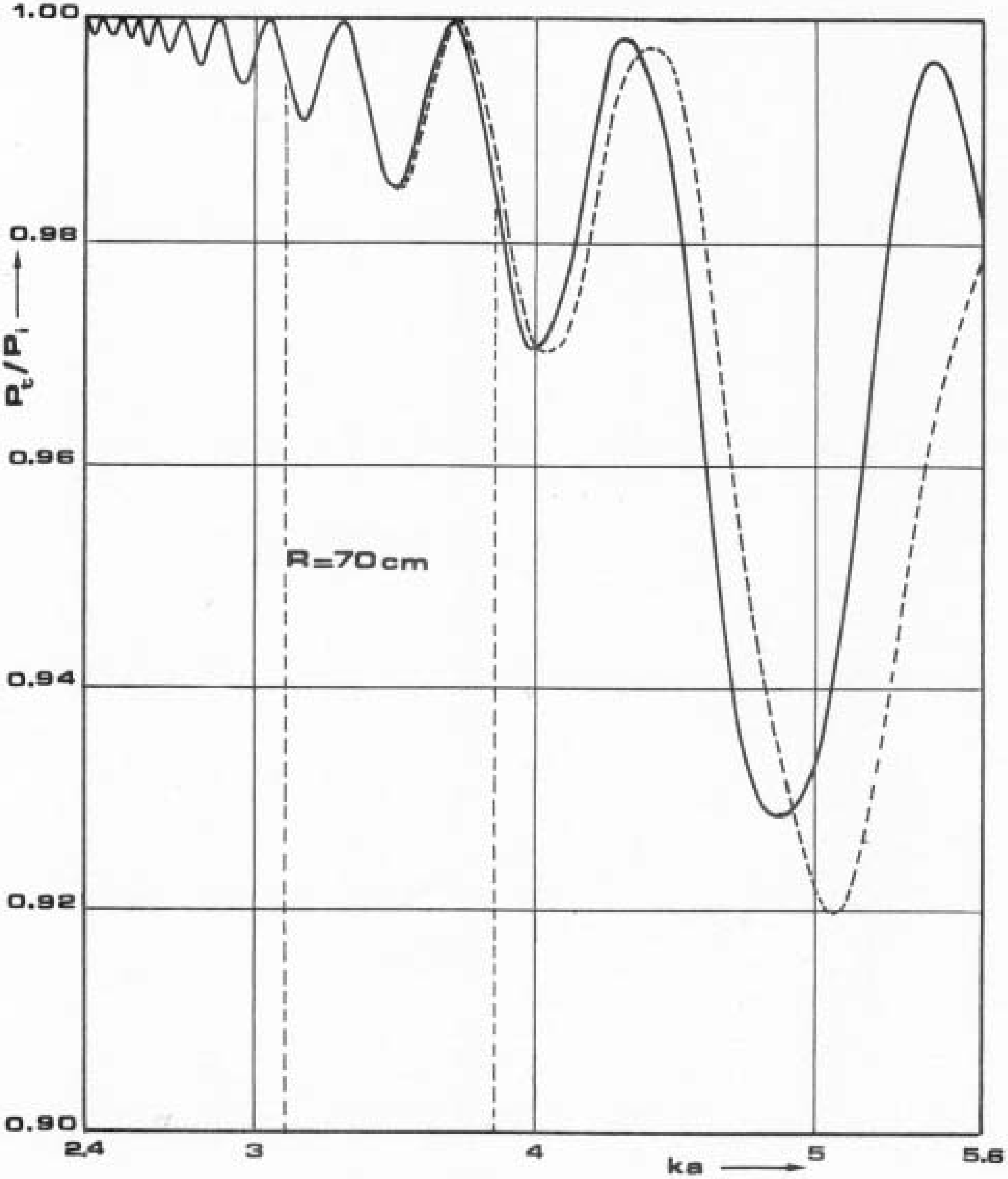


Fig.14 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation parallèle
Paramètres géométriques : coude à 90° R = 70 cm 2a = 2,779 cm

—— méthode de perturbation
--- méthode matricielle.

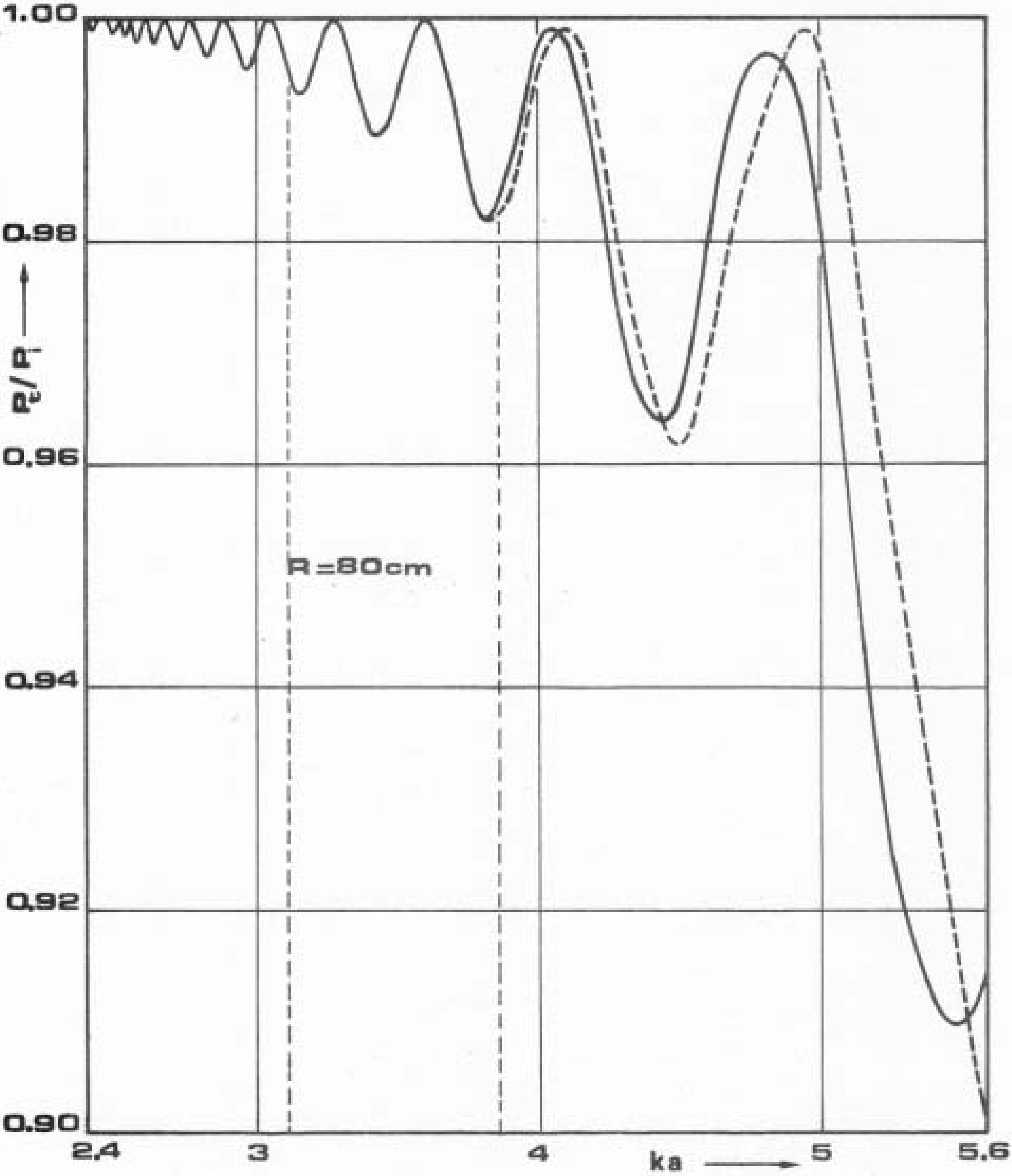


Fig. 15 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation parallèle
Paramètres géométriques : coude à 90° R = 80 cm 2a = 2,779 cm

—— méthode de perturbation
---- méthode matricielle.

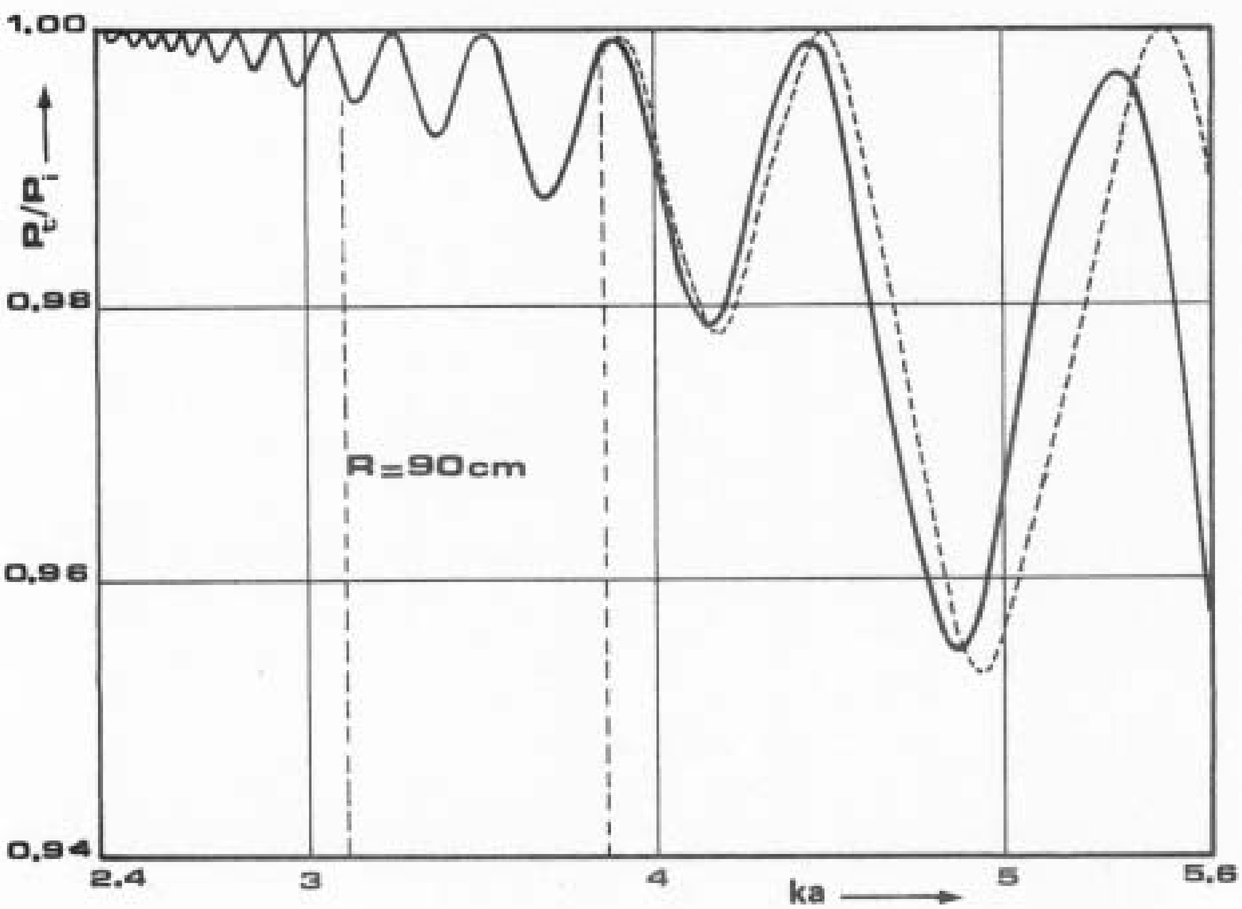


Fig.16 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation parallèle

Paramètres géométriques : coude à 90° R = 90 cm 2a = 2.779 cm

—— méthode de perturbation

---- méthode matricielle

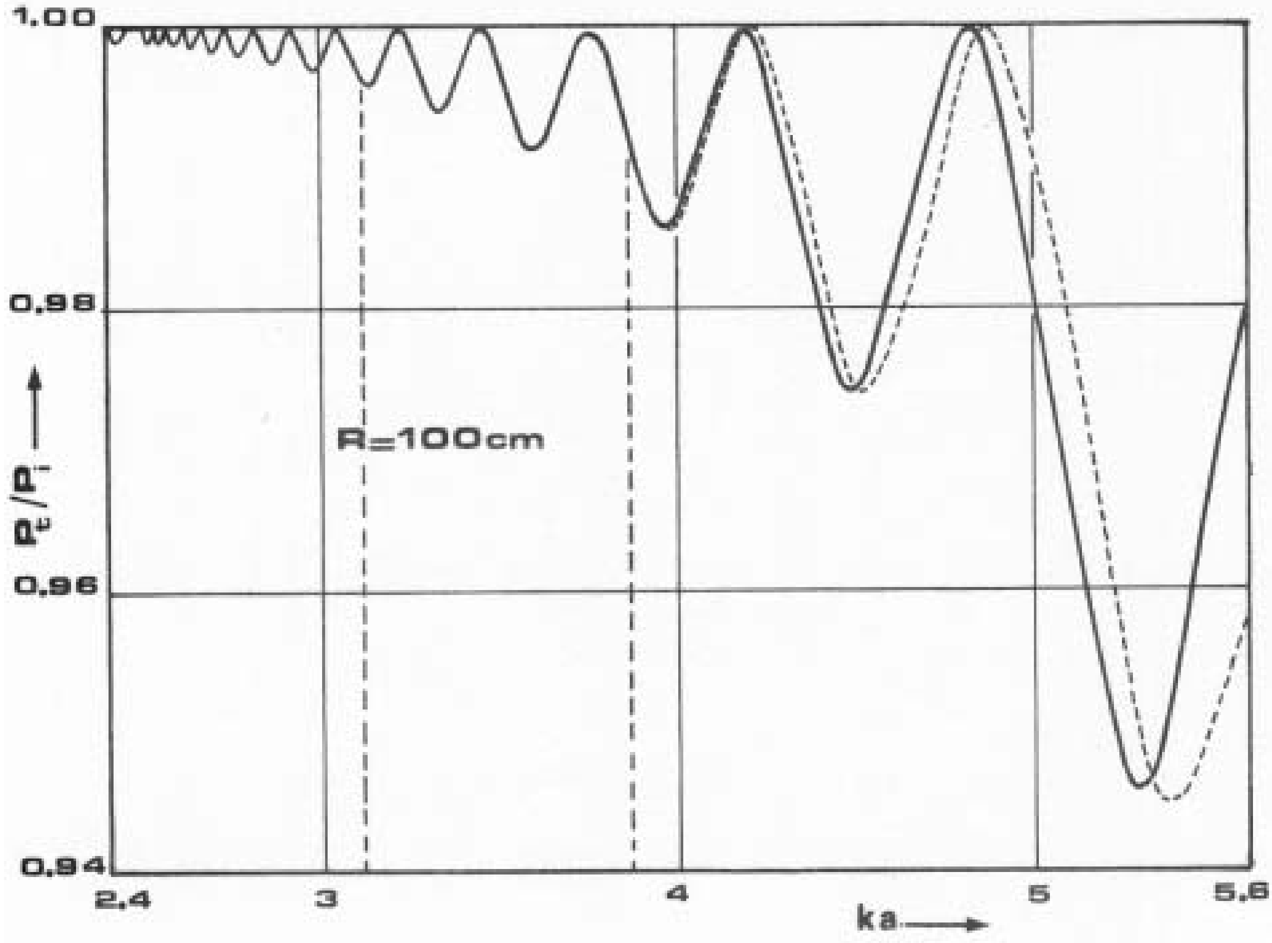


Fig. 17 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation parallèle
Paramètres géométriques : coude à 90°   R = 100 cm   2a = 2,779 cm

—— méthode de perturbation
--- méthode matricielle

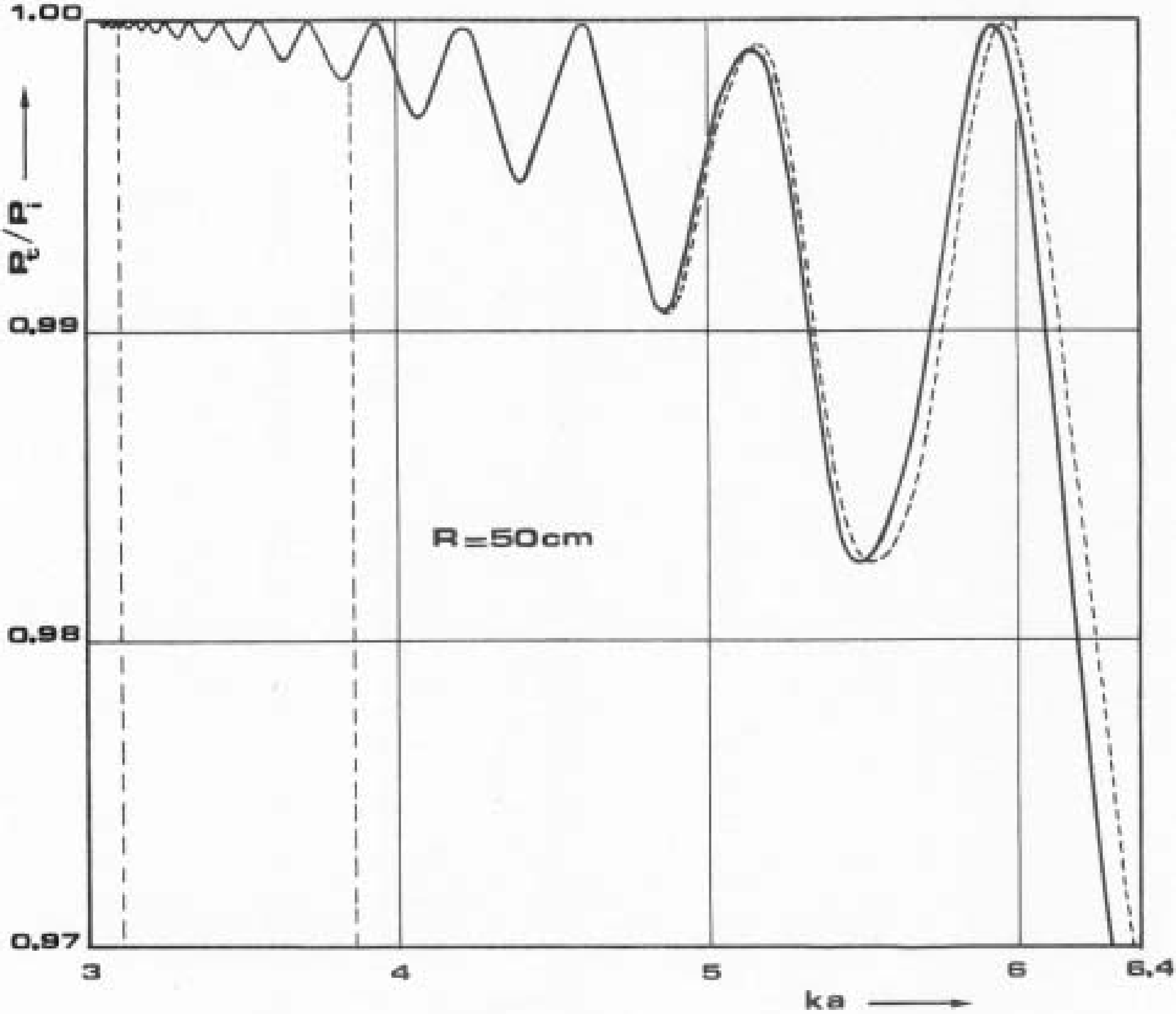


Fig. 16 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation perpendiculaire

Paramètres géométriques : coude à 90°, R = 50 cm , 2a = 2,779 cm

—— méthode de perturbation
--- méthode matricielle

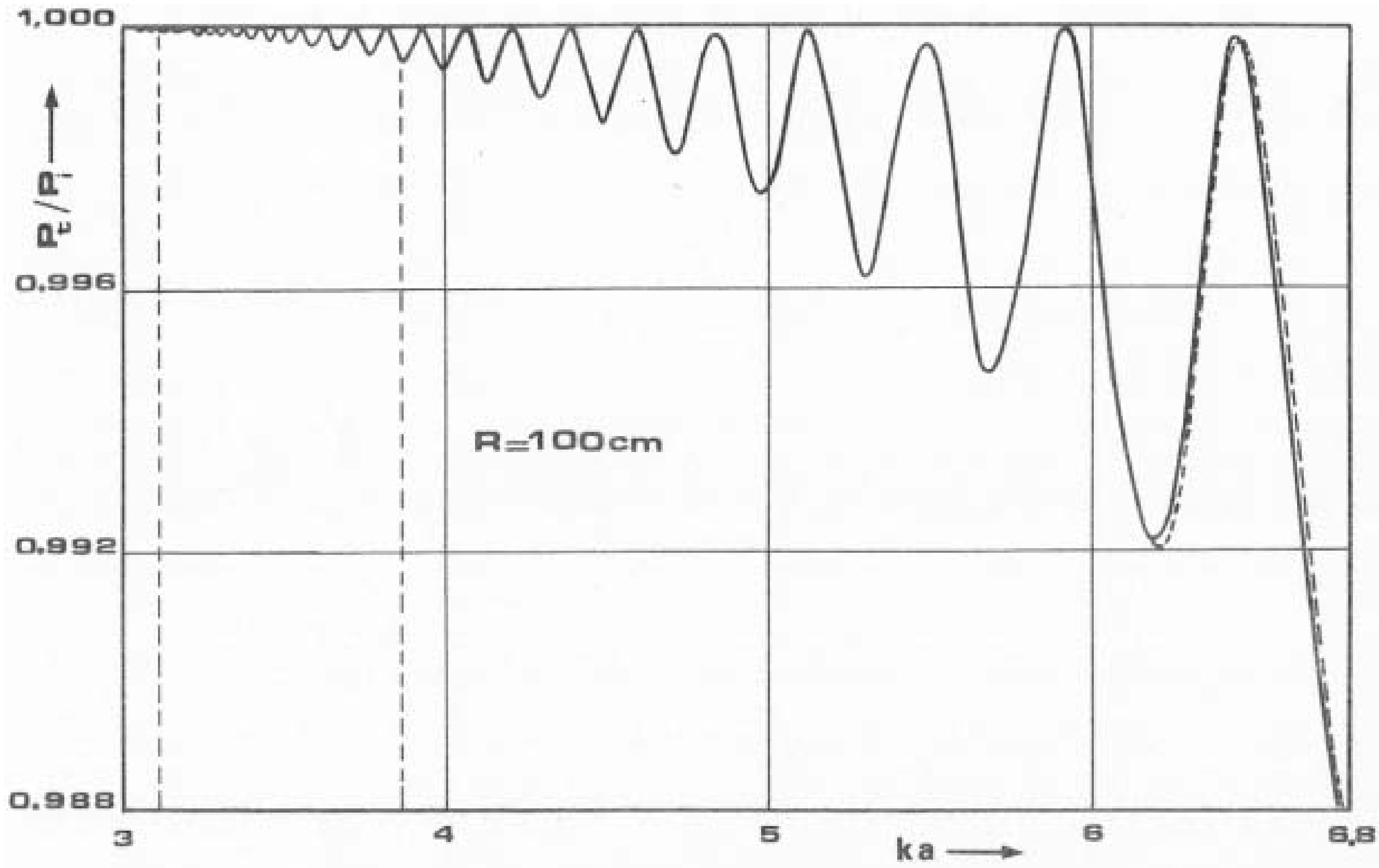


Fig. 19 - Puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} en fonction de la fréquence normalisée ka pour la polarisation perpendiculaire

Paramètres géométriques : coude à 90°, R= 100 cm, 2a = 2,779 cm

—— méthode de perturbation
---- méthode matricielle

1.3. Conclusion

La comparaison de la méthode de perturbation et de la méthode matricielle montre que :

. la méthode de perturbation bien qu'approximative conduit à des expressions analytiques qui peuvent être utilisées jusqu'à des valeurs du rayon de courbure égales à 50 cm pour le guide WC 109 de diamètre $2a = 2{,}779$ cm et pour une fréquence normalisée inférieure à 3,92.

. la méthode matricielle qui est une méthode plus exacte de résolution mais uniquement numérique doit être utilisée pour des rayons de courbure inférieurs à 50 cm dans le cas du guide WC 109.

2. EXPLOITATION DE LA METHODE DE PERTURBATION

2.1. Puissance transportée par le mode TE_{11}

A la sortie d'un coude la puissance transportée par le mode TE_{11} dépend de la fréquence (figure 12 à 19). Pour certaines fréquences, le mode TE_{11} n'est pratiquement pas atténué, alors que pour d'autres il est nettement atténué. Au fur et à mesure que la fréquence augmente, les oscillations sont de plus en plus profondes avec une légère modulation des maximums.

Les relations analytiques obtenues par la méthode de perturbation permettent d'exprimer approximativement l'équation de l'enveloppe des minimums. Cette équation est donnée dans l'annexe (G) pour les deux polarisations par les relations (7,8). Ces expressions montrent que les enveloppes sont indépendantes de la longueur du coude et qu'elles dépendent seulement de la fréquence et du rapport a/R.

La figure (20) présente l'enveloppe de $2\,\mathrm{Re}\left\{Tq^{1(w)}(ka)\right\}$ en fonction de la fréquence normalisée pour les deux polarisations. On constate que la polarisation parallèle est beaucoup plus perturbée que la polarisation perpendiculaire. Cette différence est due au couplage du mode TE_{11} avec le mode TM_{01}. Cette figure montre que les pertes du mode fondamental augmenteront rapidement avec la fréquence pour la polarisation parallèle tandis que pour la polarisation perpendiculaire elles augmenteront très lentement.

Les figures (21) et (22) présentent respectivement pour la polarisation perpendiculaire et la polarisation parallèle le réseau des courbes relatives à des rayons de courbure variant de 50 cm à 100 cm pour le guide WC 109. Ces courbes sont les enveloppes des minimums de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie d'un coude à 90°. On constate que la puissance transportée diminue au fur et à mesure que le rayon de courbure diminue car le couplage devient de plus en plus fort.

2.2. Pertes additionnelles

L'atténuation du mode TE_{11} à la sortie d'un coude est déterminée par la relation suivante :

$$\alpha_{(dB)} = -10 \log \left(\frac{P_t}{P_i}\right) \qquad (5)$$

avec P_t/P_i la puissance normalisée transportée par le mode TE_{11} à la sortie du coude.

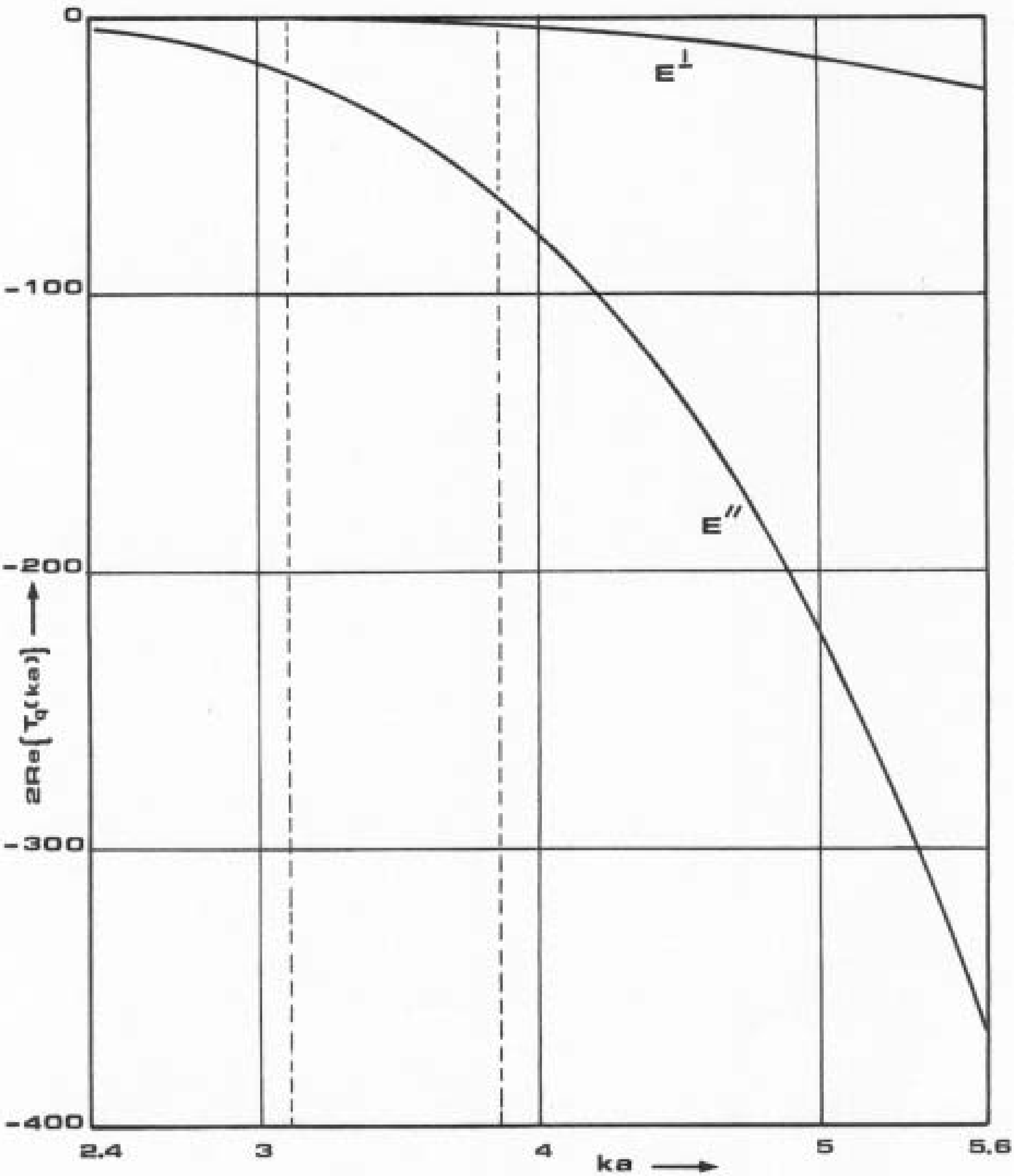


Fig. 20 - Evolution de l'enveloppe du terme $2\,\mathrm{Re}\left\{T_q^{\perp(//)}(ka)\right\}$ pris par la relation énergétique : $[P_t/P_i]^{\perp(//)} = 1 + \frac{2a^2}{R^2}\mathbf{Re}\left\{T_q^{\perp(//)}(ka)\right\}$

en fonction de la fréquence normalisée pour les deux polarisations.

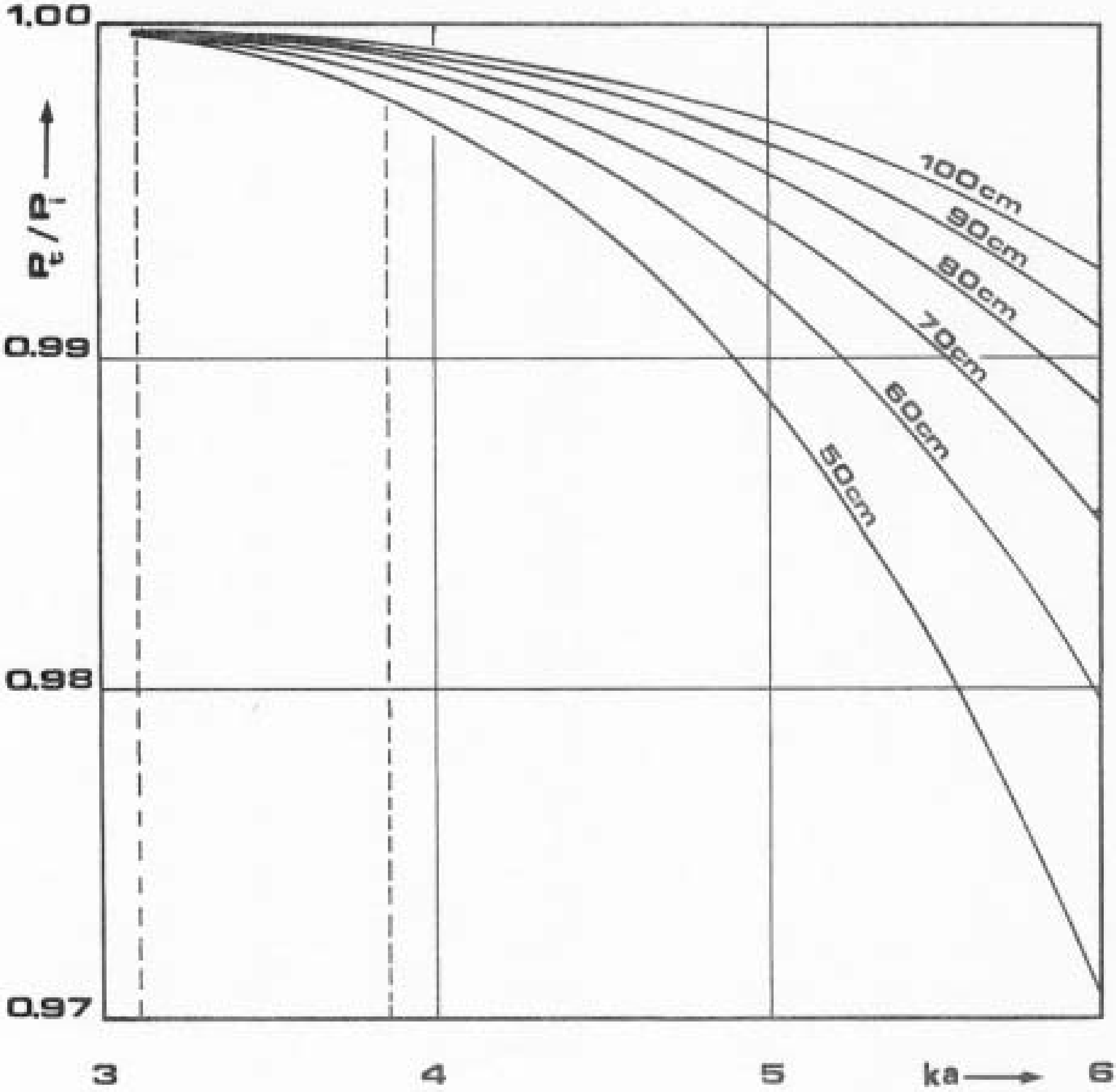


Fig.21 - Enveloppe des minimums de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie d'un coude à 90° pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie

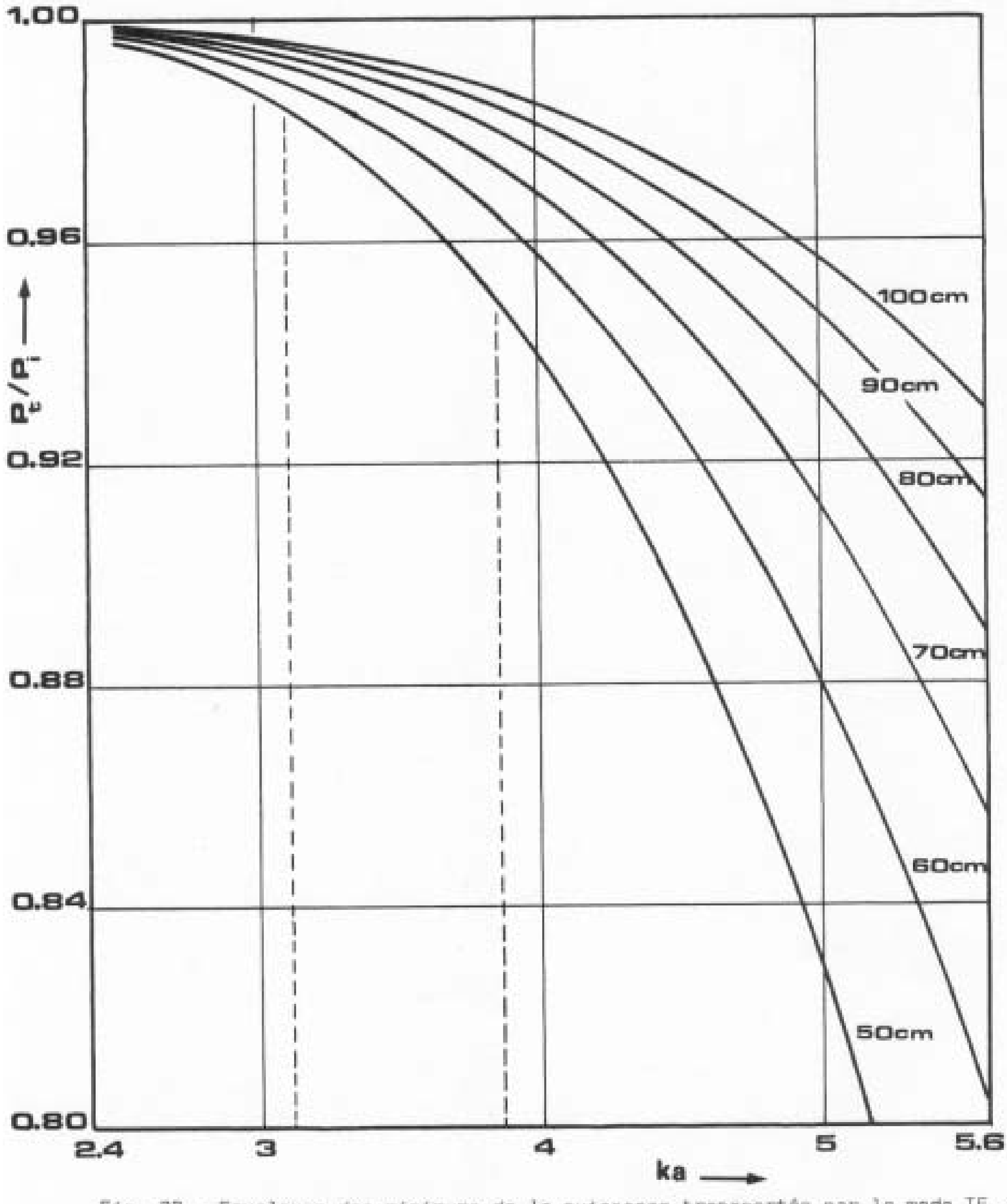


Fig. 22 - Enveloppe des minimums de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie d'un coude à 90° pour la polarisation parallèle au plan de symétrie.

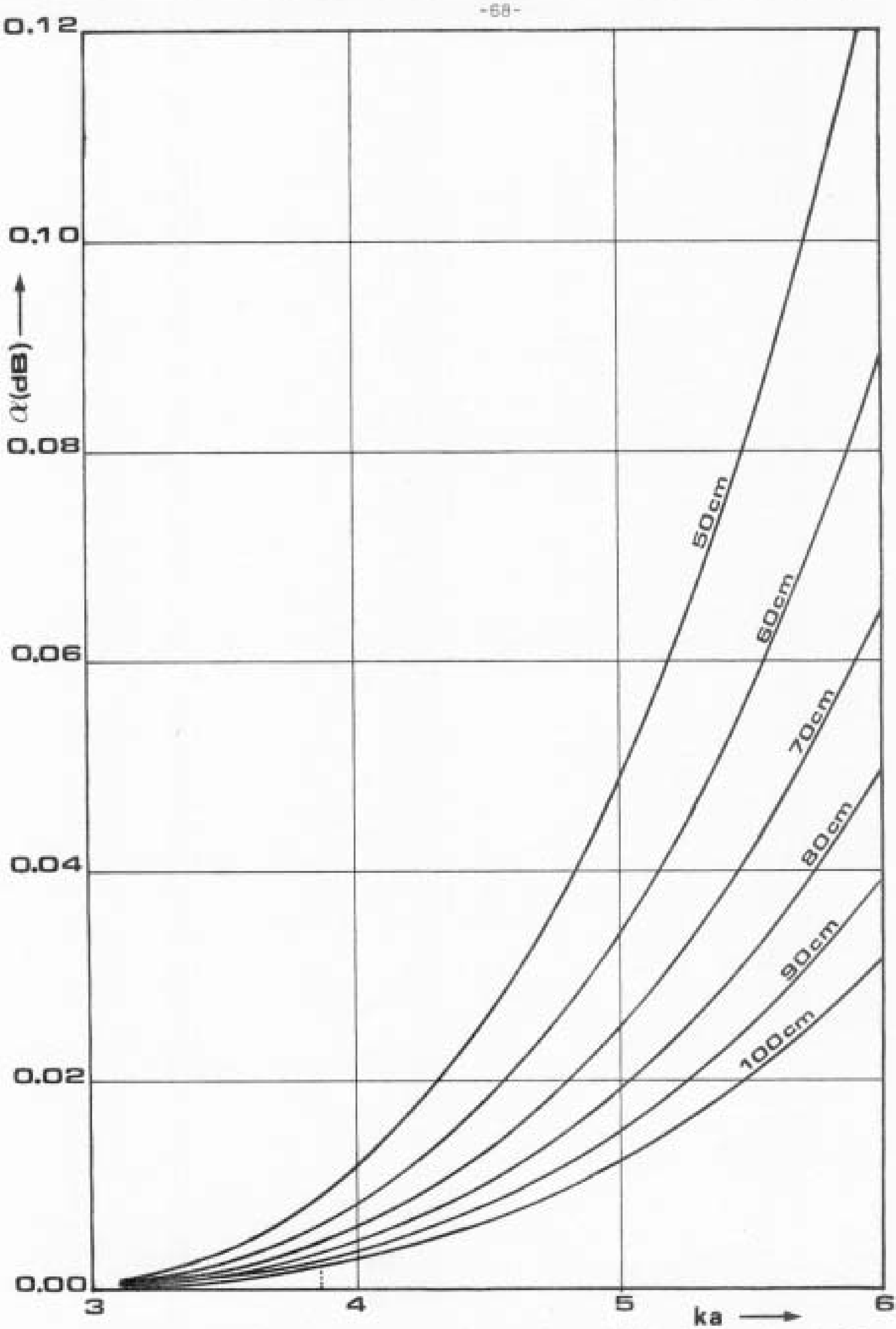


Fig. 23 - Enveloppe des maximums des pertes additionnelles du mode TE_{11} à la sortie d'un coude à 90° pour la polarisation perpendiculaire au plan de symétrie.

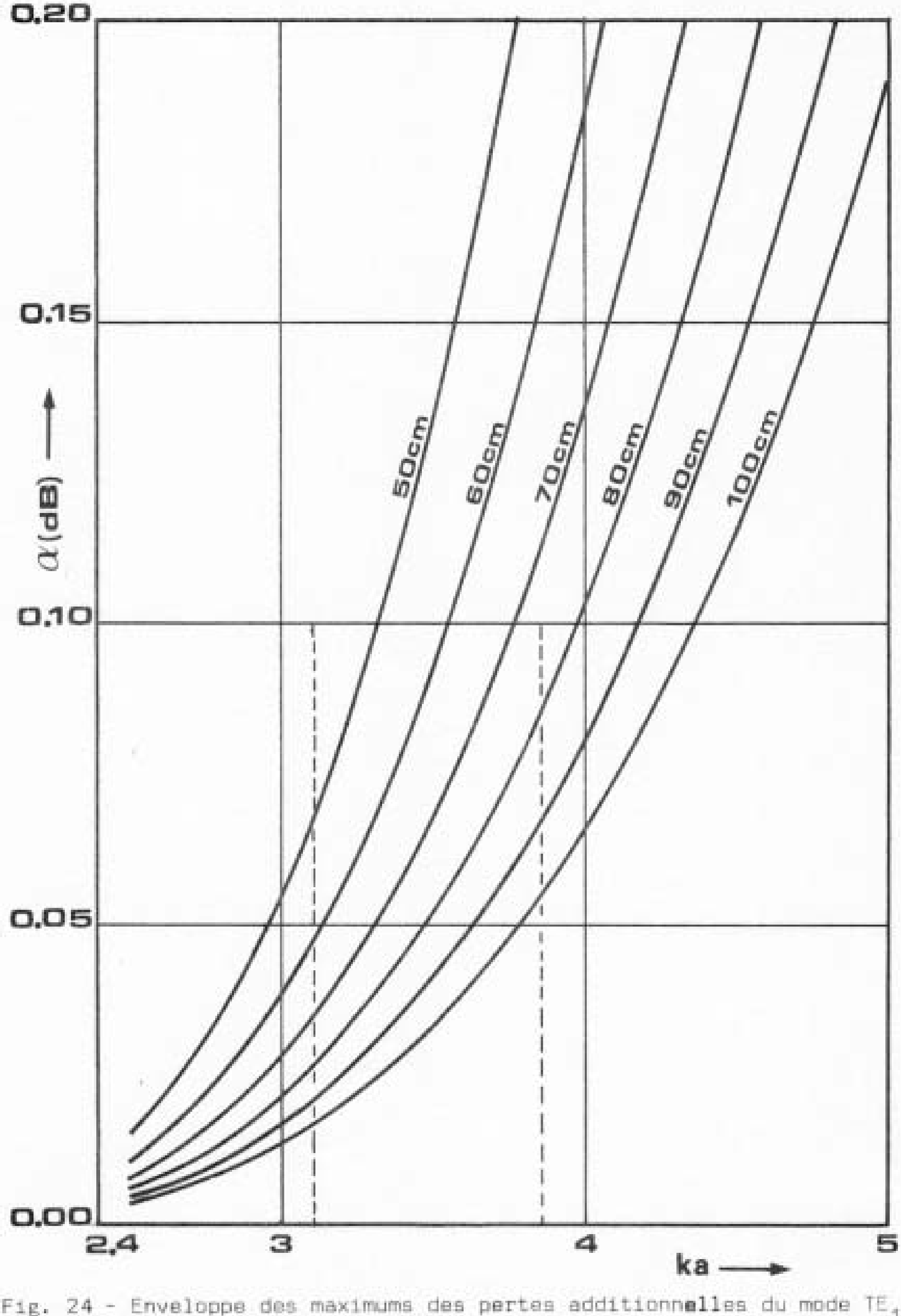


Fig. 24 - Enveloppe des maximums des pertes additionnelles du mode TE_{11} à la sortie d'un coude à 90° pour la polarisation **parallèle** au plan de symétrie.

L'atténuation en fonction de la fréquence pour les deux polarisations est représentée par des courbes qui oscillent de plus en plus profondément. Les maximums de ces courbes correspondent au minimums de la puissance transportée. Pour simplifier la présentation, nous avons représenté sur un même graphique l'enveloppe des maximums de ces oscillations en fonction de la fréquence normalisée ka. Les figures (23) et (24) présentent respectivement ces enveloppes en fonction de ka pour des rayons de courbure variant de 50 à 100 cm. Dans le cas de la polarisation du mode TE_{11} perpendiculaire au plan de symétrie du coude les pertes restent nettement inférieures à 0,1 dB dans la bande passante utile entre 3,11 et 3,86 (figure 23). Par contre dans le cas de la polarisation parallèle les pertes sont nettement plus importantes ; dans le bande de fréquence utile, les pertes restent inférieures à 0,1 dB pour des rayons de courbure supérieurs à 70 cm.

2.3. Angles de Jouguet

Pour des valeurs discrètes de l'angle d'ouverture ou de la fréquence, le mode TE_{11} n'est pas ou très peu atténué par le coude. Ces angles critiques appelés "angles de Jouguet" ont été mis en évidence par Jouguet (7).

La complexité des expressions analytiques obtenues pour la méthode de perturbation exclut pratiquement la possibilité d'obtenir une expression analytique simple pour les angles de Jouguet sauf si on considère un couplage de mode à mode.

La figure 25_a présente la variation de la puissance transportée par le mode TE_{11} en fonction de l'angle d'ouverture ϕ pour certaines valeurs de la fréquence normalisée et pour les deux polarisations.

- pour la polarisation perpendiculaire et pour ka = 3,6 la variation est périodique de période 8,4 °. A cette fréquence le mode ne se couple qu'avec le mode TE_{21} et l'expression analytique qui permet d'avoir les angles de Jouguet est simple :

$$\Phi_J^{\perp} = 2k\pi \frac{a}{R} \frac{1 + \frac{a^2}{R^2}\eta_2}{\gamma_{11} - \gamma_{21}} \qquad (6)$$

Pour ka = 4,6 l'amplitude de la puissance transportée présente une légère modulation car deux modes (TE_{21} et TE_{01}) sont couplés avec le mode TE_{11}.

-Pour la polarisation parallèle, nous constatons le même phénomène. La variation de la puissance transportée est périodique pour ka = 2,6. A cette fré-

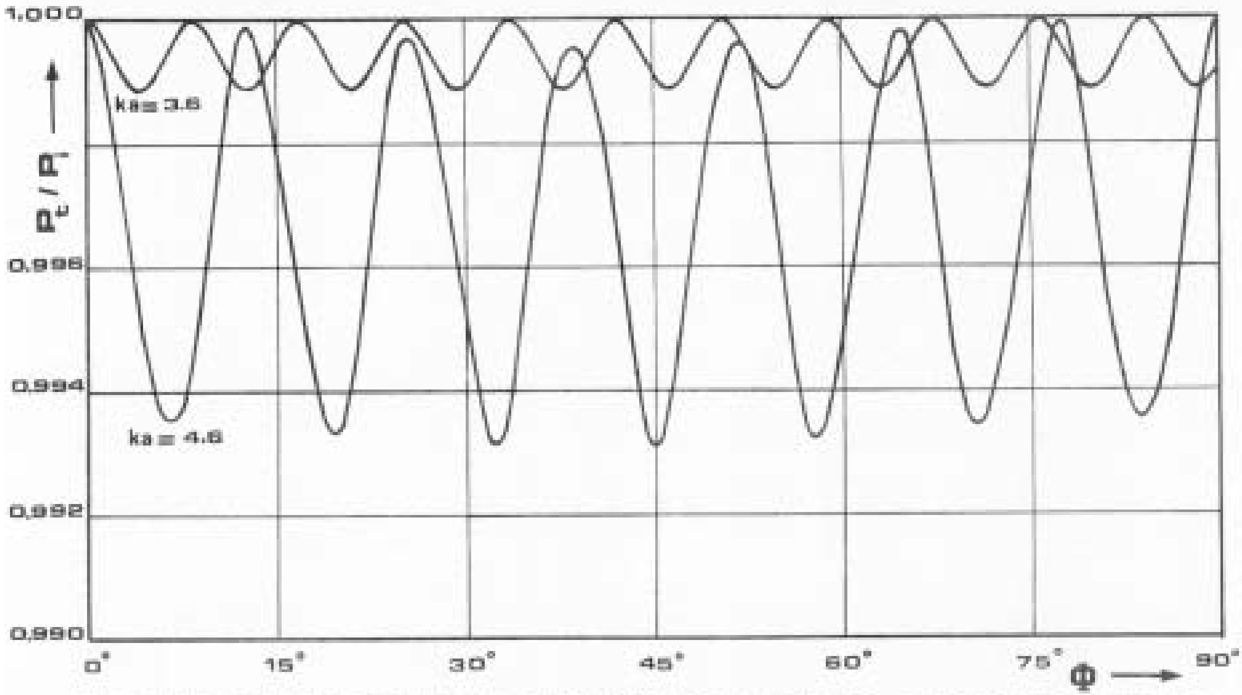


Fig. 25a - Variation de puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie d'un coude de rayon de courbure de 50 cm pour la polarisation perpendiculaire en fonction de l'angle d'ouverture du coude.

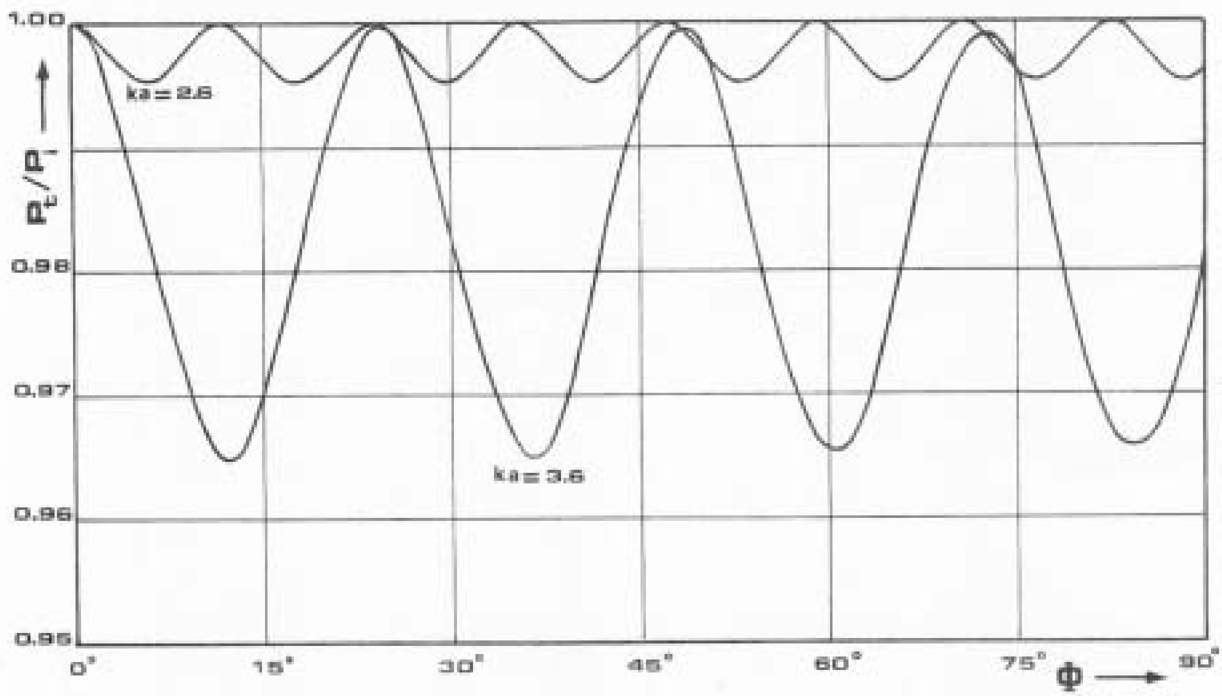


Fig. 25b - Variation de puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie d'un coude de rayon de courbure de 50 cm pour la polarisation parallèle en fonction de l'angle d'ouverture du coude.

quence seul le mode TM_{01} se couple avec le mode TE_{11}. La période est de 11,8 conformément à la relation :

$$\Phi''_J = 2K\pi \frac{a}{R} \frac{1 + \frac{a^2}{R^2} \xi_2}{\gamma_{11} - \nu_{01}} \qquad (7)$$

Pour ka = 3,6 on constate une légère modulation de la puissance transportée car deux modes parasites (TM_{01}, TE_{21}) se propagent à cette fréquence.

On voit donc qu'il est possible d'envisager des transmissions pratiquement sans pertes par ondes TE_{11} non seulement dans des guides parfaitement rectilignes mais aussi dans des structures composées de parties rectilignes raccordées par des coudes à condition que la géométrie des coudes soit soigneusement calculée.

2.4. Puissance transportée par le mode TE_{11} dans le cas de deux coudes séparés par un tronçon de guide

Les figures (26) et (27) présentent en fonction de la fréquence normalisée ka l'évolution de la puissance transportée par le mode TE_{11} pour les deux polarisations à la sortie de deux coudes séparés par un tronçon de guide de longueur L = 100 cm. Ces courbes présentent des pics d'absorption qui proviennent de réflexions multiples dans le tronçon de guide et dont la position dépend de sa longueur. Cette propriété est vérifiée par les figures (28), (29) où la longueur du tronçon de guide est L = 200 cm, les coudes restant identiques. La position et l'amplitude des pics sont totalement différentes. Mais pour un signal qui couvrirait une très large bande ayant un spectre de fréquence compris entre la fréquence de coupure du premier mode parasite et ka égal 4 par exemple, les pertes de deux coudes auraient tendance à s'ajouter. C'est ainsi que les pertes totales à la sortie du deuxième coude seront deux fois les pertes du premier coude, à 6 % près pour la polarisation perpendiculaire et 4,6 % pour la polarisation parallèle (fig.30).

Sur les figures (27) et (29) la ligne horizontale en pointillé indique un niveau d'atténuation de 0,2 dB au-dessus duquel les pertes sont acceptables. Les pertes additionnelles sont donc admissibles dans la bande de fréquence utile pour un rayon de courbure de 100 cm pour la polarisation parallèle puisqu'elles sont inférieures à 0,2 dB. De même pour la polarisation perpendiculaire les pertes additionnelles restent nettement inférieures à 0,2 dB.

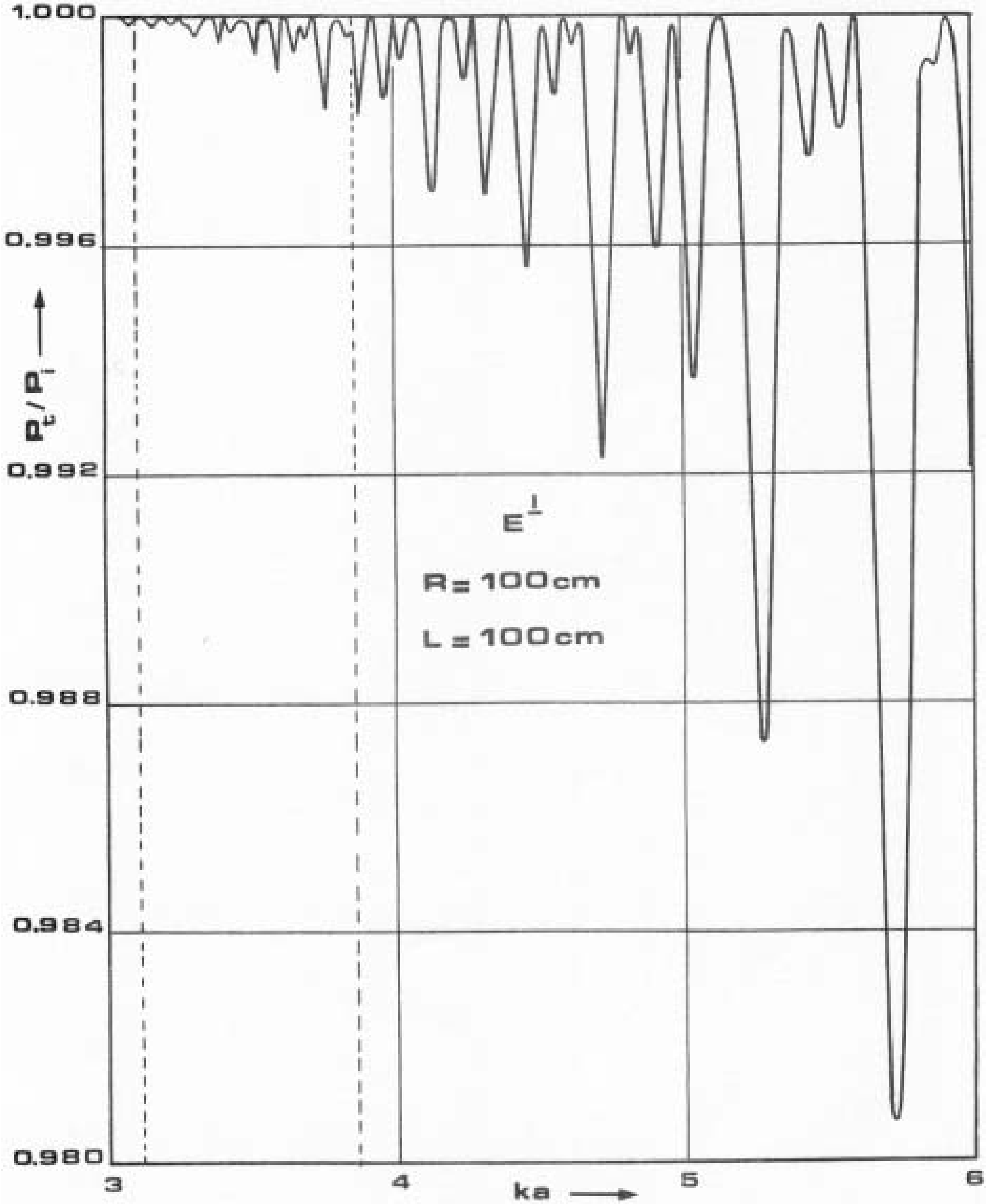


Fig. 26 - Variation de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie de deux coudes séparés par un tronçon de guide de longueur L = 100 cm pour la polarisation perpendiculaire. Autres paramètres géométriques : coudes à 90° R = 100 cm.

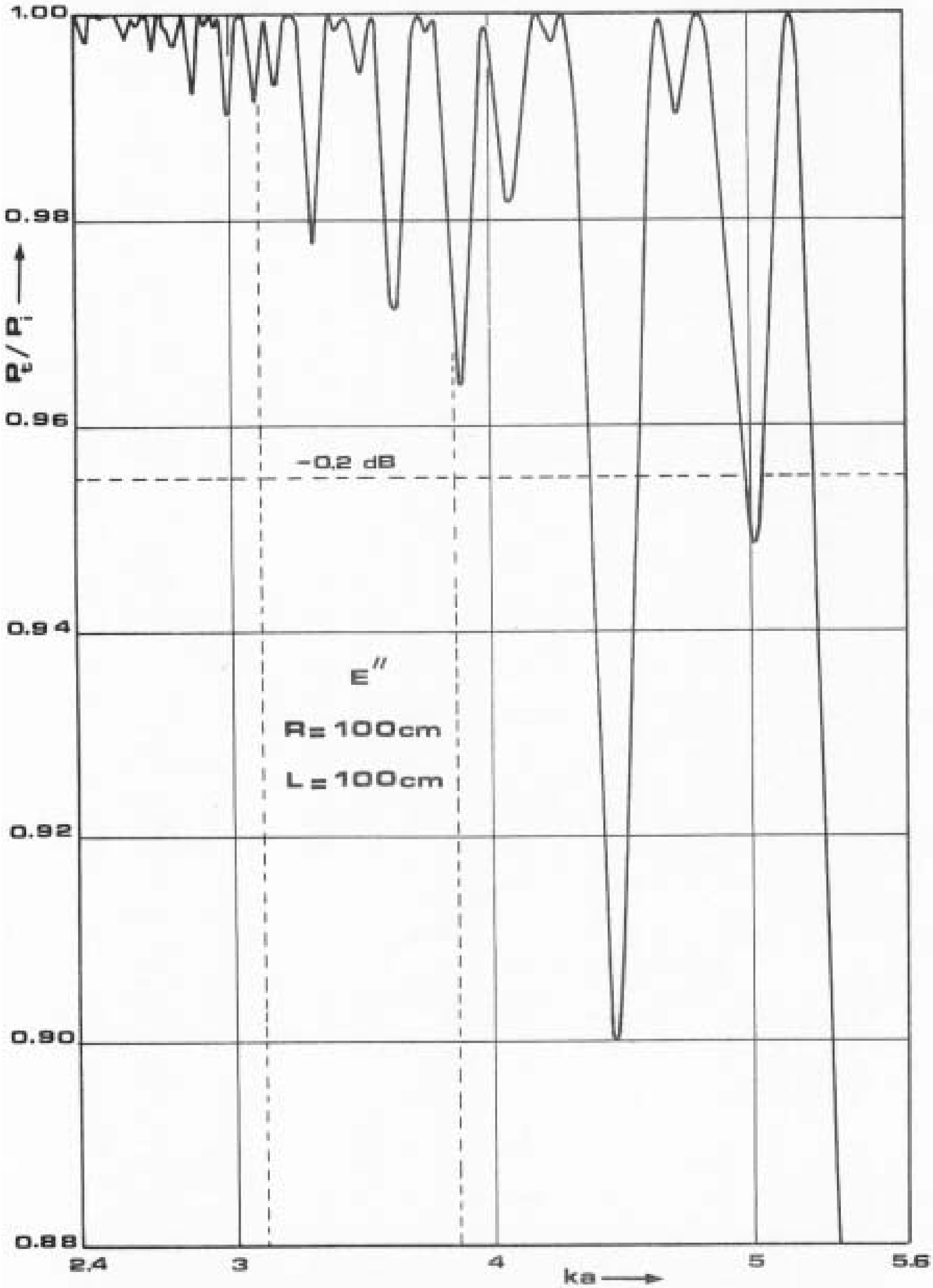


Fig.27 - Variation de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie de deux coudes séparés par un tronçon de guide de longueur L = 100cm pour la polarisation parallèle. Autres paramètres géométriques : coudes à 90° R=100cm.

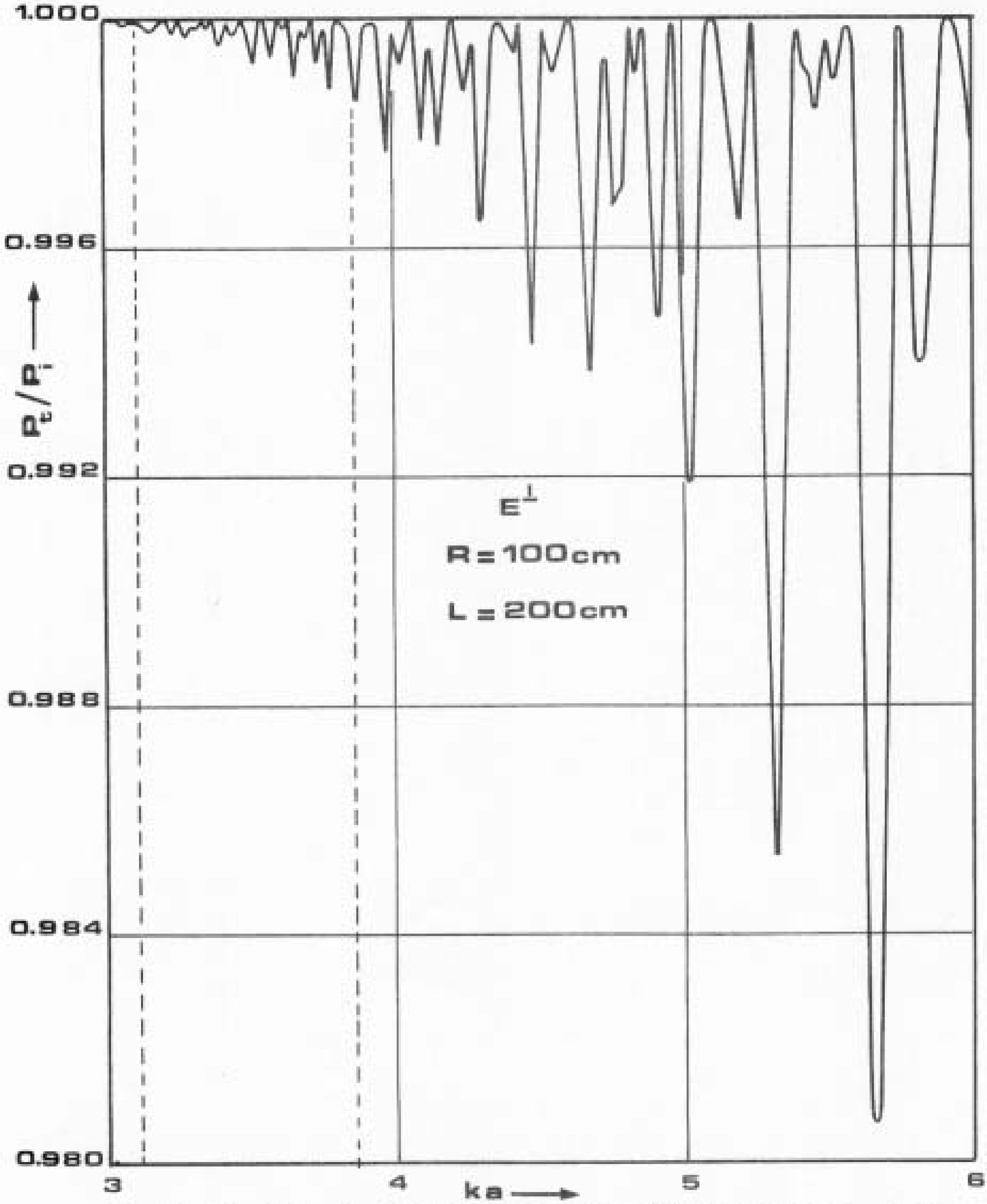


Fig.28 - Variation de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie de deux coudes séparés par un tronçon de guide de longueur L=200 pour la polarisation perpendiculaire. Autres paramètres géométriques : coudes à 90°, R=200 cm.

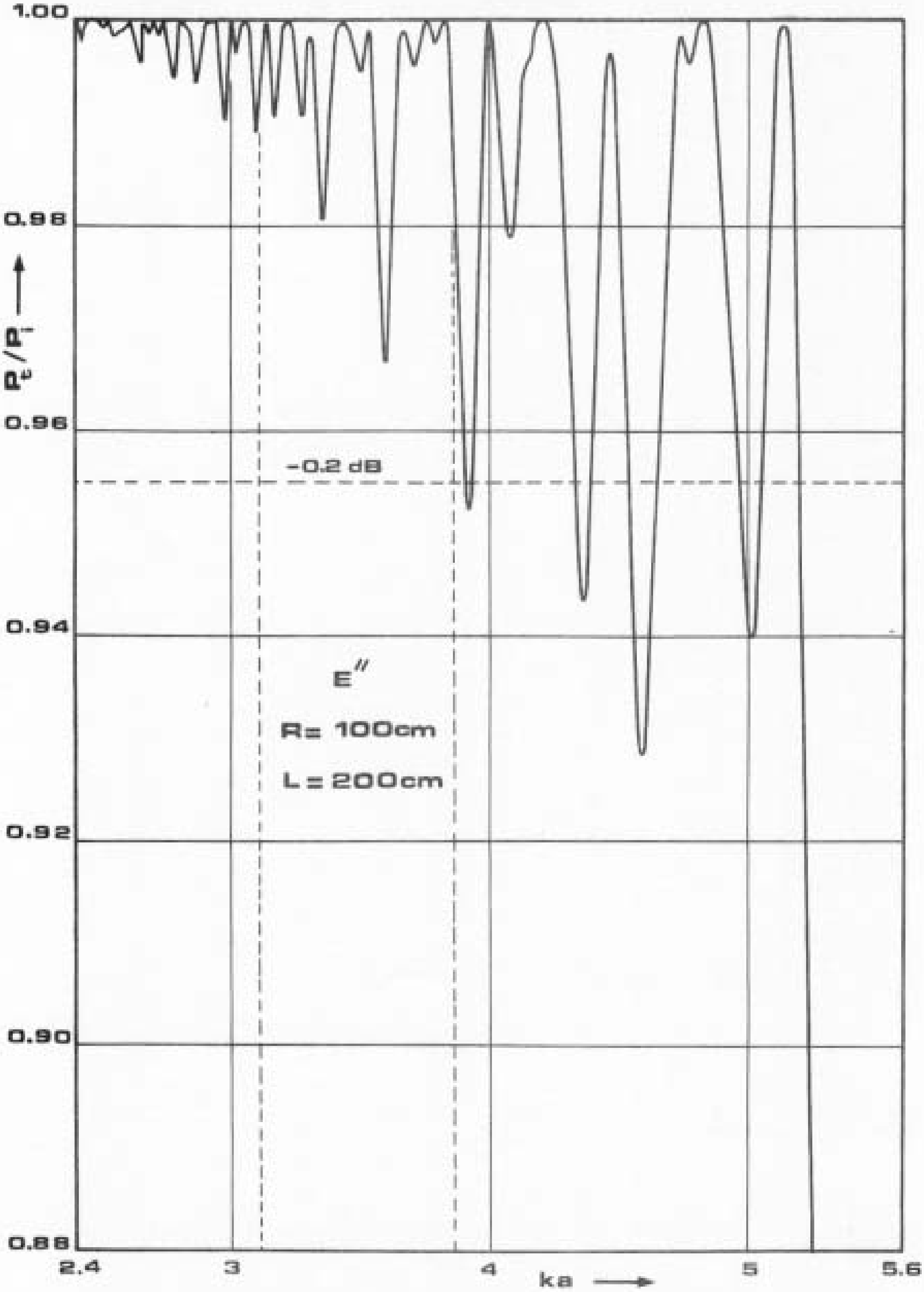


Fig.25 - Variation de la puissance transportée par le mode TE_{11} à la sortie de deux coudes séparés par un tronçon de guide de longueur L=200 pour la polarisation parallèle. Autres paramètres géométriques : coudes à 90°, R = 200 cm.

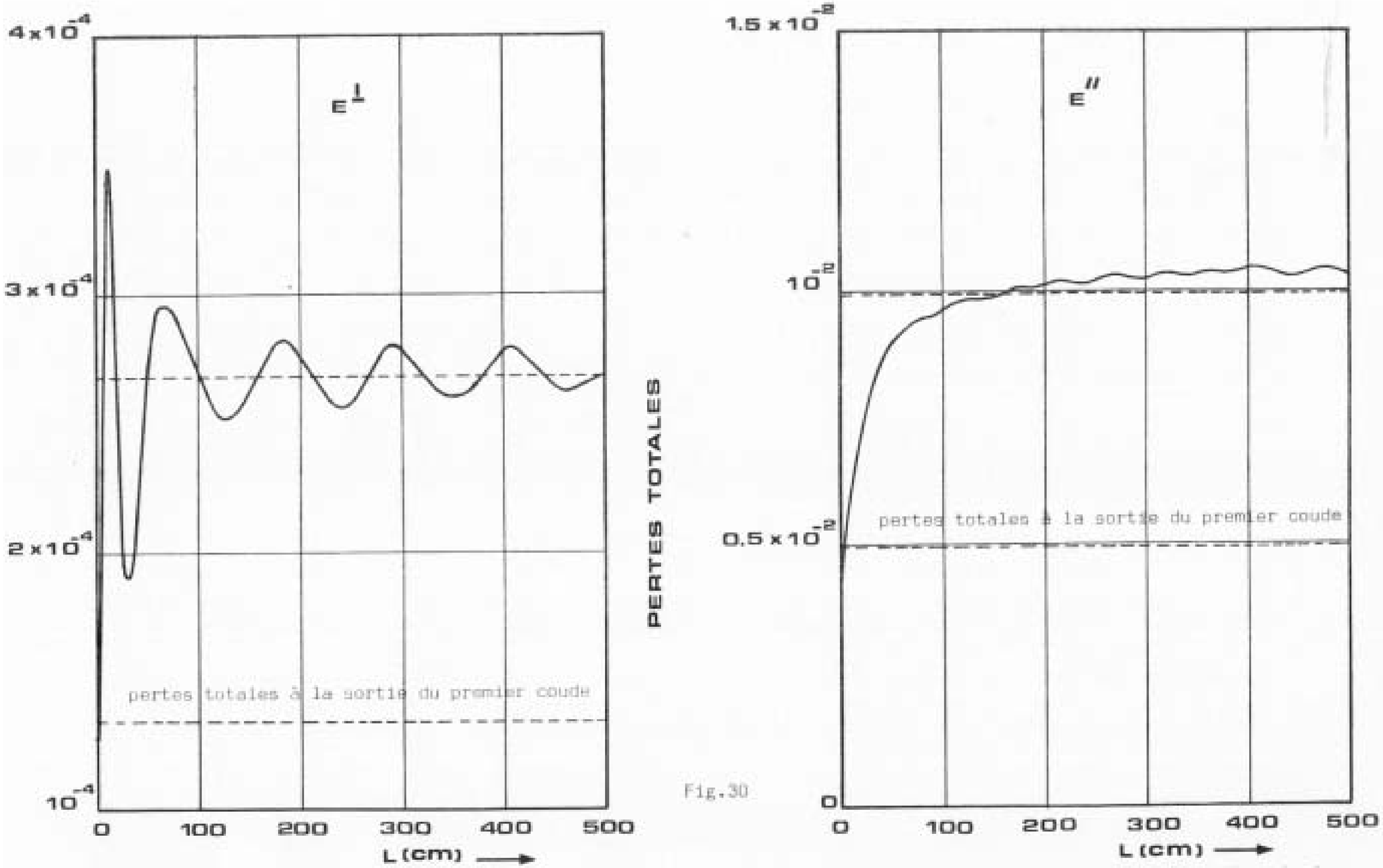


Fig.30

a) Evolution des pertes totales à la sortie de deux coudes en fonction de la longueur du tronçon de guide pour la polarisation perpendiculaire et pour un rayon de courbure égal à 100 cm.

b) Evolution des pertes totales à la sortie de deux coudes en fonction de la longueur du tronçon de guide pour la polarisation parallèle et pour un rayon de courbure égal à 100 cm.

2.5 - Ondulation du temps de propagation de groupe

Le temps de propagation de groupe est défini par la relation suivante :

$$\tau = \frac{d\phi}{d\omega} \qquad (8)$$

ϕ représente le déphasage pour une longueur L du guide.
Cette relation peut s'écrire en posant $\omega = \frac{c}{a}\,ka$:

$$\tau = \frac{a}{c}\,\frac{d\phi}{d(ka)} \qquad (9)$$

Le déphasage ϕ_g du guide rectiligne pour le mode TE_{11} s'obtient à partir de la constante de propagation γ_{11} et de la longueur L du guide :

$$\phi_g = \gamma_{11}\,L \qquad (10)$$

Dans le cas d'un coude de même longueur que le guide rectiligne $L=S_1$, le déphasage à la sortie du coude pour les deux polarisations est obtenu à partir des relations (25) et (39) du chapitre III en prenant l'argument de l'amplitude du mode TE_{11} à la sortie du coude :

$$\varphi_c^{\perp} = \operatorname{Arg}\left[b_{11}^{\perp}(S_1)\right]$$
$$\varphi_c^{\parallel} = \operatorname{Arg}\left[b_{11}^{\parallel}(S_1)\right] \qquad (11)$$

avec

$$b_{11}^{\perp}(S_1) = b_0\left[1 + \frac{a^2}{R^2}\,T_q^{\perp}(ka)\right]e^{-j\gamma_{11}^{\perp}S_1/a}$$
$$b_{11}^{\parallel}(S_1) = b_0\left[1 + \frac{a^2}{R^2}\,T_q^{\parallel}(ka)\right]e^{-j\gamma_{11}^{\parallel}S_1/a} \qquad (12)$$

Les déphasages $\phi_c^{\perp}$ et $\phi_c^{\parallel}$ pour les deux polarisations à la sortie d'un coude sont très peu différents du déphasage ϕ_g du guide rectiligne, de même longueur. Pour mettre plus facilement en évidence l'ondulation du temps de propagation de groupe, nous avons calculé la différence des déphasages pour les deux polarisations :

$$\varphi^{\perp} = \varphi_g - \varphi_c^{\perp}$$
$$\varphi^{\parallel} = \varphi_g - \varphi_c^{\parallel} \qquad (13)$$

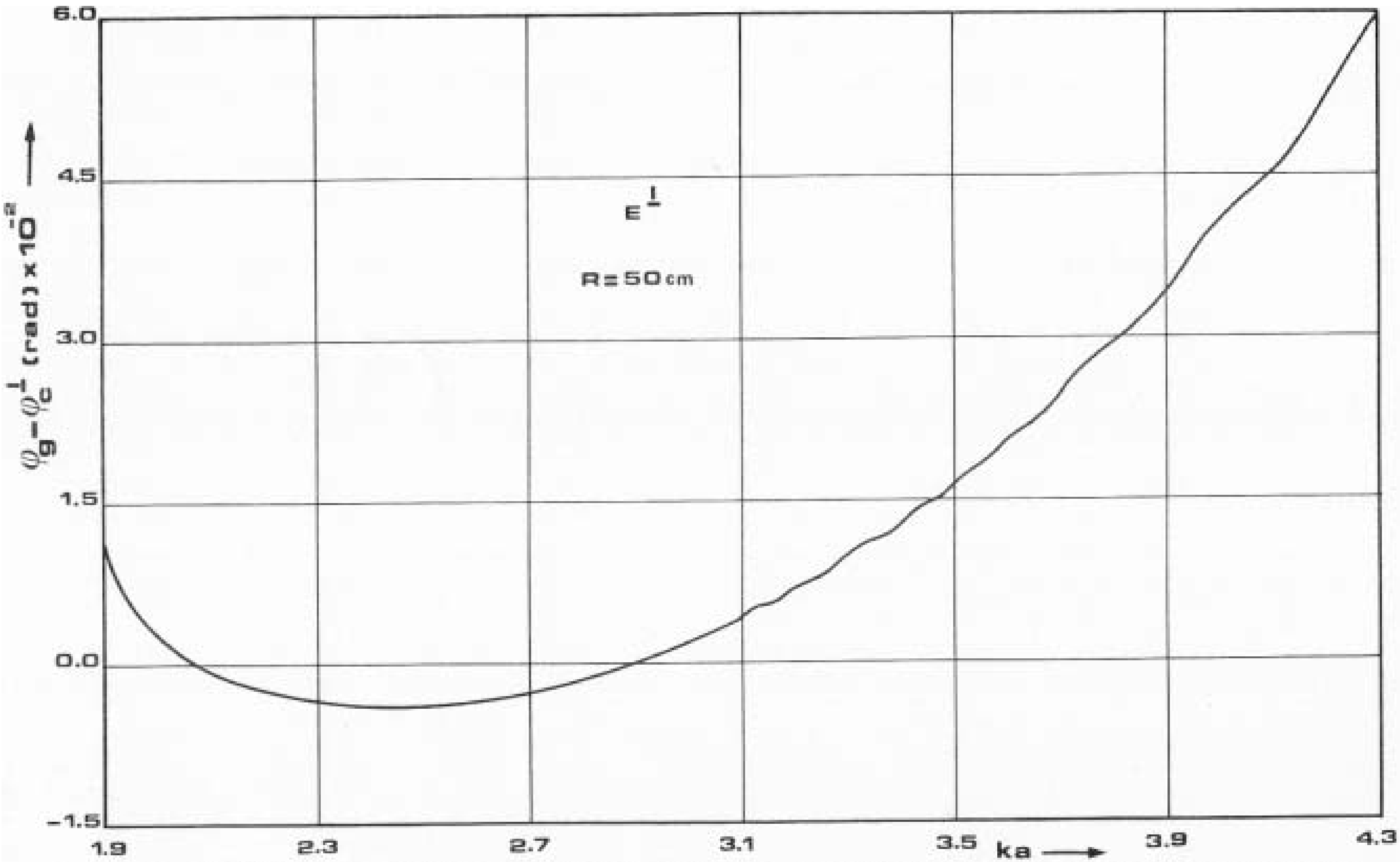


Fig.31 - Evolution de la différence de phase en fonction de la fréquence normalisée ka à la sortie d'un coude à 90° de rayon de courbure égal à 50 cm pour la polarisation perpendiculaire.

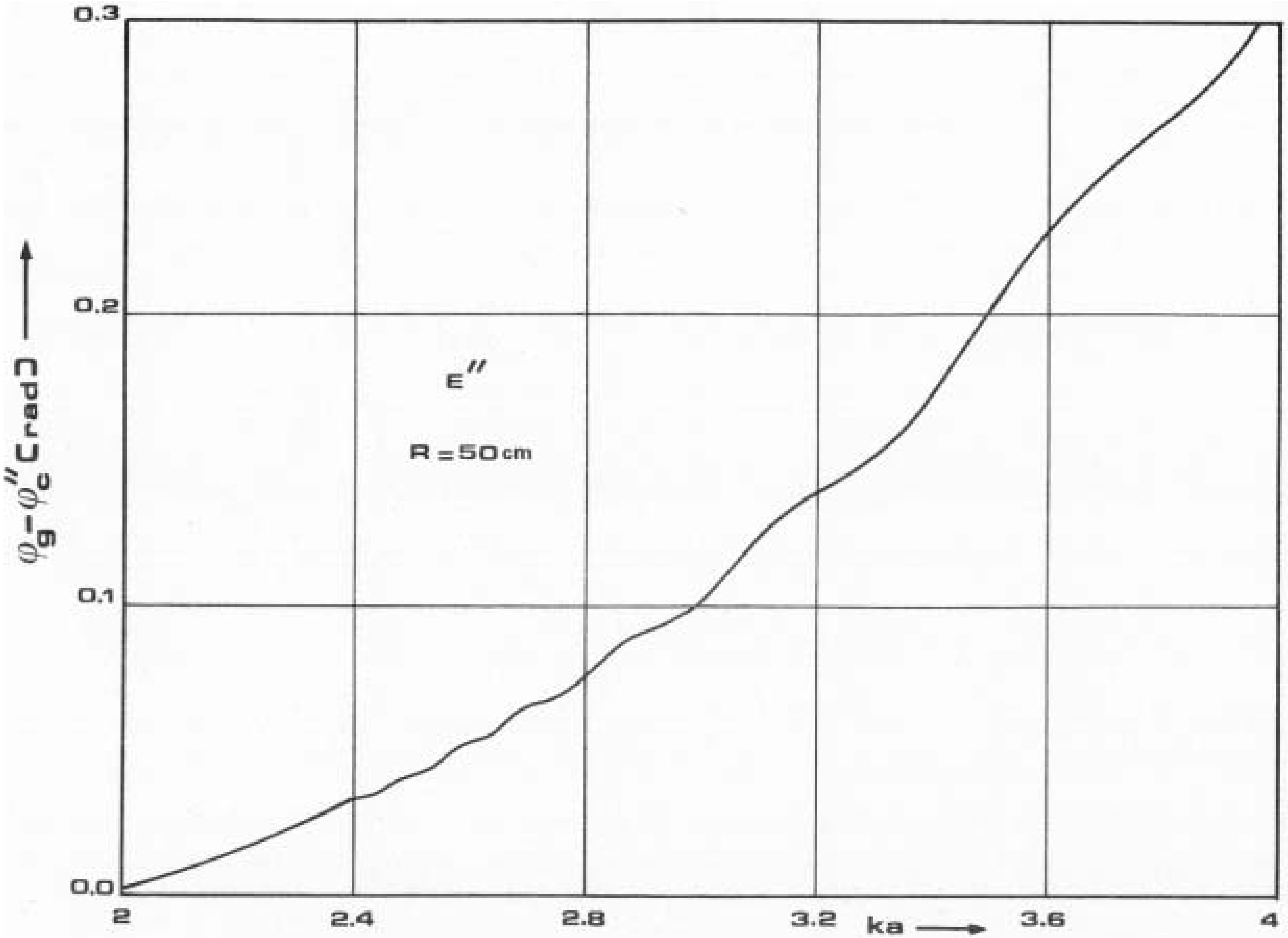


Fig.32 - Evolution de la différence de phase en fonction de la fréquence normalisée ka à la sortie d'un coude à 90° de rayon de courbure égal à 50 cm pour la polarisation parallèle.

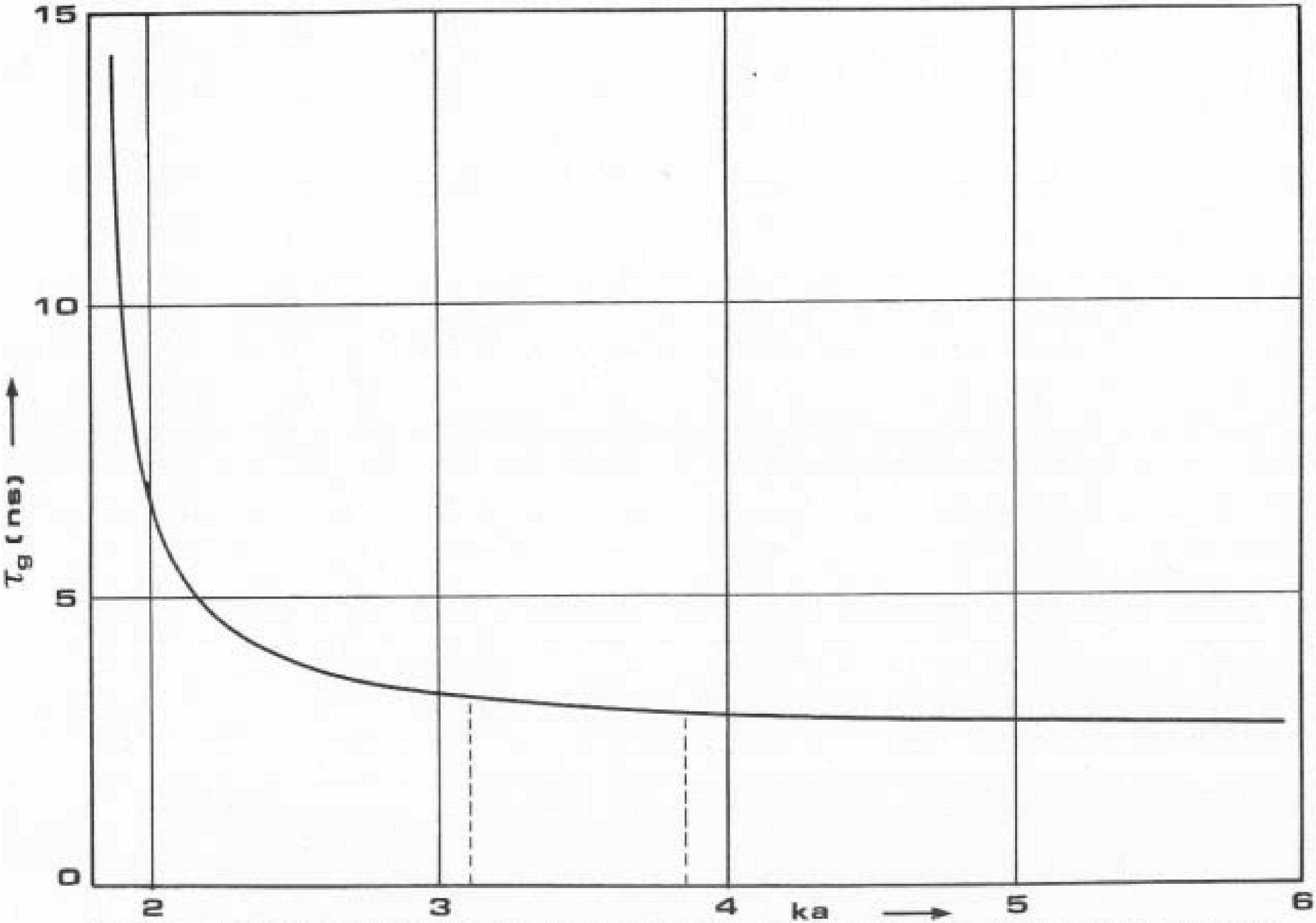


Fig.33 - Temps de propagation de groupe d'un guide rectiligne de longueur égale à celle d'un coude à 90° de rayon de courbure de 50 cm.

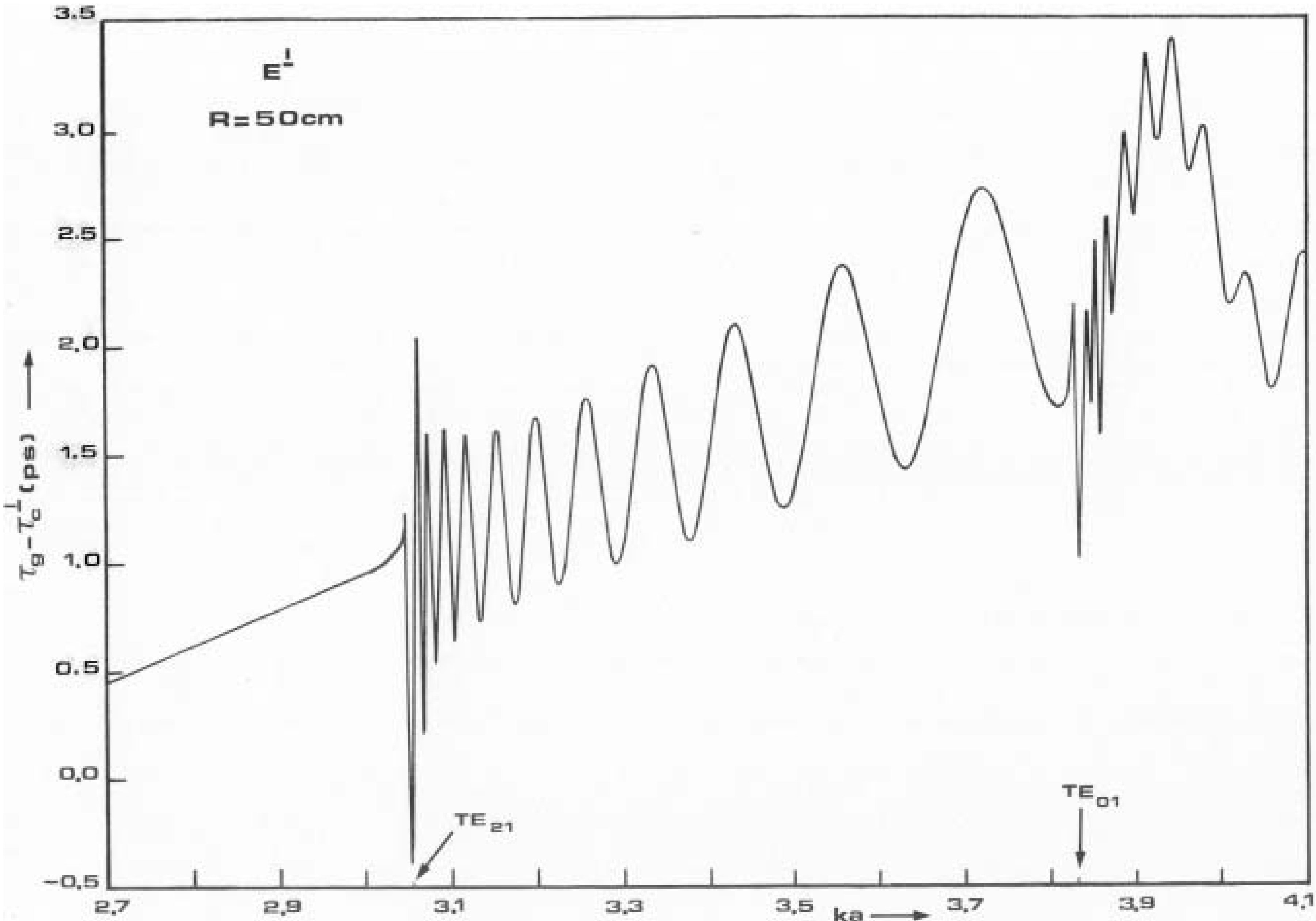


Fig.34 - Ondulation du temps de propagation de groupe pour la polarisation perpendiculaire à la sortie d'un coude

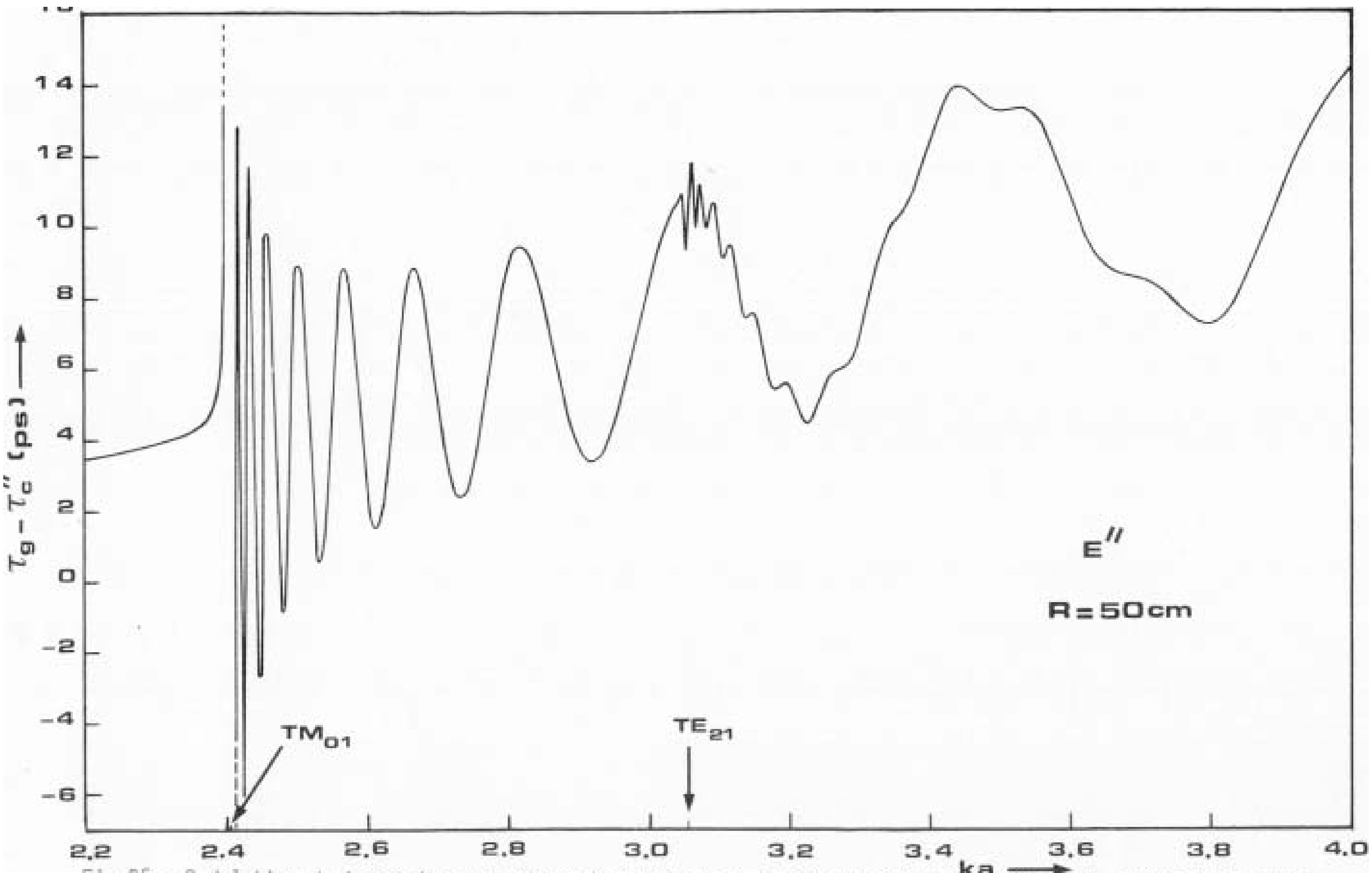


Fig.35 - Ondulation du temps de propagation de groupe pour la polarisation parallèle à la sortie d'un coude à 90° et de rayon de courbure de 50 cm.

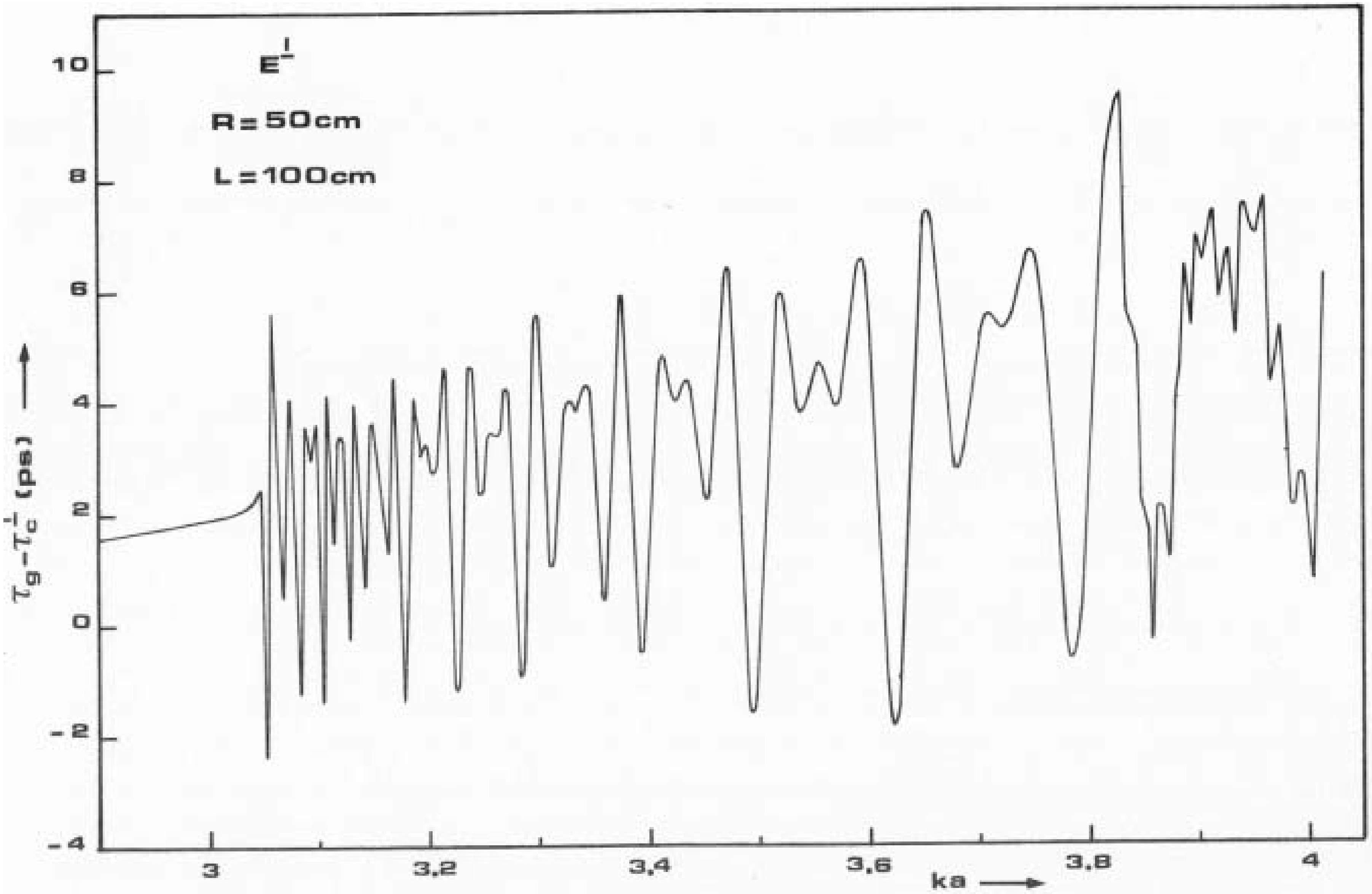


Fig.36 - Ondulation du temps de propagation de groupe à la sortie de deux coudes à 90° de rayon de courbure de 50 cm séparés par un tronçon de guide de longueur L = 100cm pour la polarisation perpendiculaire.

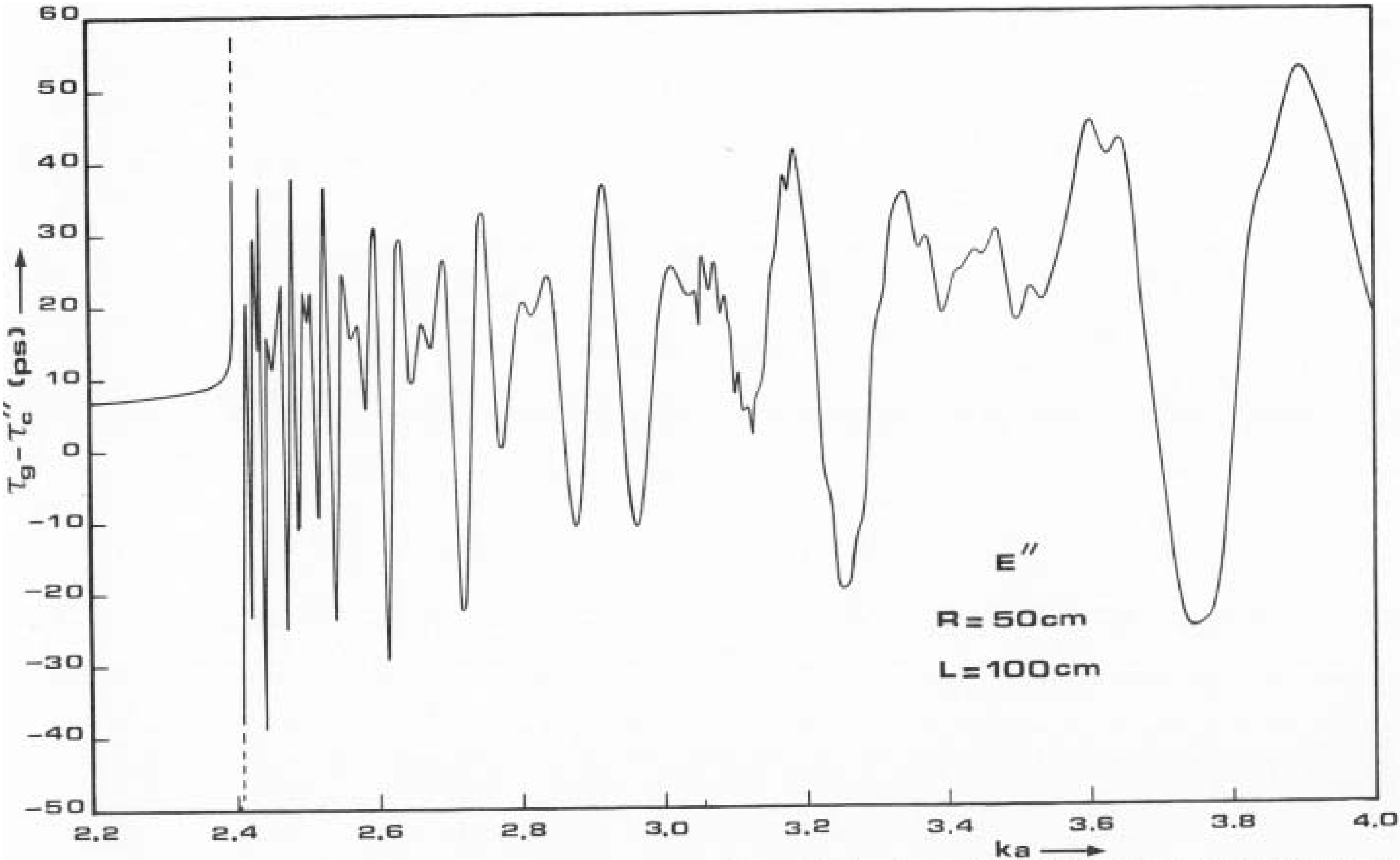


Fig.37 - Ondulation du temps de propagation de groupe à la sortie de deux coudes à 90° de rayon de courbure de 50c séparés par un tronçon de guide de longueur L=100 cm pour la polarisation parallèle.

Dans les figures (31) et (32) on présente respectivement l'évolution de cette différence pour la polarisation perpendiculaire et la polarisation parallèle en fonction de la fréquence normalisée ka pour le guide WC109 de rayon de courbure de 50 cm. Ces courbes montrent que la distortion de la phase est caractérisée par des ondulations qui apparaissent lorsque les modes parasites se propagent.

L'ondulation du temps de propagation de groupe s'obtient donc à partir de la relation (8) en dérivant les relations (13) par rapport à la fréquence normalisée ka.

La figure (33) présente le temps de groupe pour un guide rectiligne de longueur égale à celle d'un coude de 90° de rayon de courbure de 50 cm. (soit L = 78,5 cm). La variation du temps de groupe du guide dans la bande utile (3,11 - 3,86) est de l'ordre de 0,2 ns.

Les figures (34) et (35) présentent l'ondulation du temps de propagation de groupe pour les deux polarisations à la sortie d'un coude à 90° de rayon de courbure de 50 cm. L'amplitude des ondulations reste très faible devant la variation du temps de propagation de groupe du guide rectiligne ; elles sont de l'ordre de 2 ps pour la polarisation perpendiculaire et de l'ordre de 15 ps pour la polarisation parallèle. Sur ces courbes, nous remarquons qu'à la coupure des modes parasite les ondulations sont perturbées et que parfois même il apparaît des brusques variations comme c'est le cas pour la polarisation parallèle (fig.35) à la coupure du mode TM_{01}. L'amplitude des ondulations pour cette fréquence est de l'ordre de 0,1 ns. Après la coupure du premier mode parasite les ondulations sont des oscillations presque régulières dont l'amplitude augmente lentement. Après l'apparition du deuxième mode parasite on observe des ondulations totalement irrégulières dues à la superposition des ondulations créées par chacun des modes parasites.

Les figures (36) et (37) présentent pour les deux polarisations l'ondulation du temps de propagation de groupe à la sortie de deux coudes à 90° de rayon de courbure de 50 cm séparés par un tronçon de guide de 100 cm de longueur. Les multiples réflexions perturbent encore plus les ondulations et leurs amplitudes sont nettement augmentées ; elles sont de l'ordre de 12 ps pour la polarisation perpendiculaire et de 60 ps pour la polarisation parallèle.

2.6. Diaphonie dans le cas du transport de deux polarisations

2.6.1. Les causes de diaphonie

Nous avons étudié l'influence d'un coude sur la propagation du mode TE_{11} avec un plan de polarisation du vecteur champ électrique :

. soit dans le plan de symétrie du coude (noté polarisation parallèle ou $E^{//}$)

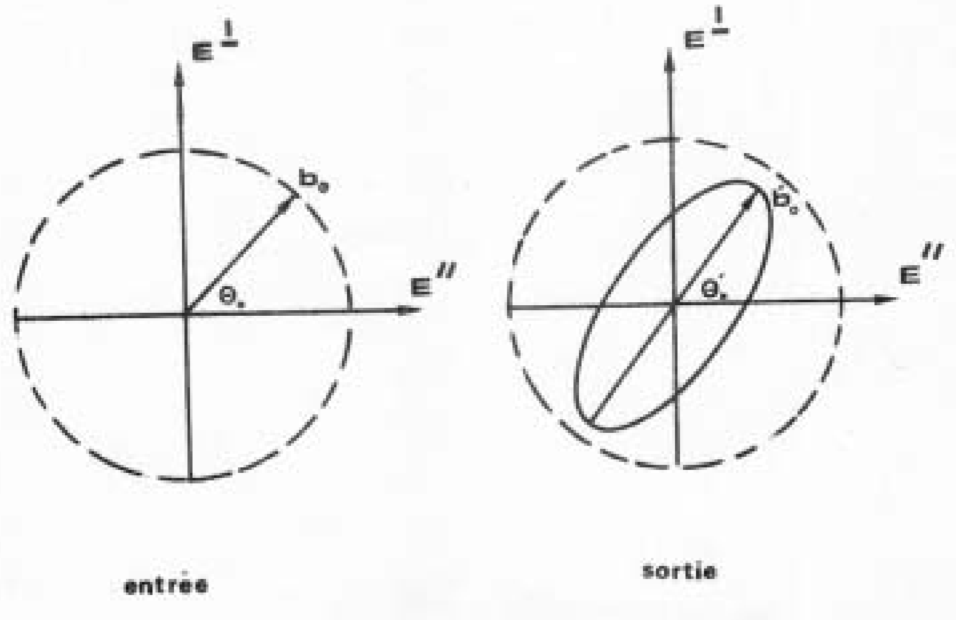
. soit dans le plan perpendiculaire (noté perpendiculaire ou $E^{\perp}$)

Les résultats obtenus précédemment montrent que :

. à l'intérieur du coude les constantes de propagation sont différentes suivant ces deux directions

. à la sortie du coude l'atténuation est plus importante suivant $E^{//}$ que $E^{\perp}$; le plan de polarisation reste inchangé et si le mode TE_{11} est polarisé rectilignement à l'entrée il garde la polarisation rectiligne à la sortie.

Etudions le cas d'une orientation arbitraire du plan de polarisation du mode TE_{11} à l'entrée du coude. Soit b_0 son amplitude et θ_0 son orientation par rapport à l'axe de symétrie du coude (fig. 38).



- Fig. 38 -

L'étude théorique ne pose aucun problème car il suffit de projeter ce vecteur suivant les deux directions privilégiées de propagation dont l'influence est parfaitement connue. A la sortie nous obtiendrons deux composantes du vecteur électrique atténuées avec des amplitudes données par les relations suivantes :

$$b_{11}(s_1)_x = b_0 \cos\theta_0 \left[1 + \frac{a^2}{R^2} T_q^{/\!/}(ka) \right] e^{-j\gamma_{11}^{/\!/} s_1/a}$$

$$b_{11}(s_1)_y = b_0 \sin\theta_0 \left[1 + \frac{a^2}{R^2} T_q^{\perp}(ka) \right] e^{-j\gamma_{11}^{\perp} s_1/a} \qquad [14]$$

A la sortie du coude le mode TE_{11} sera donc atténue $b'_0 < b_0$ avec :

. une amplitude qui sera la résultante de deux composantes suivant les deux directions privilégiées

. une légère rotation du plan de polarisation ($\theta_0 \neq \theta'_0$) due à l'atténuation différente suivant $E^{/\!/}$ et $E^{\perp}$. Compte tenu des atténuations très faibles dans la bande utile cet effet peut être négligé (affaiblissement diaphonique de l'ordre 100 dB pour R = 100cm et $\theta_0 = 30°$).

. une polarisation elliptique due à la différence de phase suivant $E^{/\!/}$ et $E^{\perp}$. C'est la cause principale de la diaphonie. Elle conduit à un affaiblissement diaphonique inférieur à 30 dB.

La figure 40 présente l'évolution de la différence de phase ϕ_p entre les deux polarisations en fonction de la fréquence normalisée ka. Sur cette figure la ligne continue présente la différence de phase calculée d'après la relation :

$$\varphi_p = (\gamma_{11}^{/\!/} - \gamma_{11}^{\perp}) s_1/a \qquad [15]$$

et la ligne pointillée la différence de phase calculée d'après la relation :

$$\varphi_p = \varphi_c^{/\!/} - \varphi_c^{\perp} \qquad [16]$$

avec $\phi_c^{/\!/}$ et $\phi_c^{\perp}$ données par les relations [11]. La figure (40) montre que les deux courbes sont parfaitement confondues dans la bande utile pour R égal 100 cm. Par contre pour R = 50 cm il y a un écart de l'ordre de 4 %. Dans la pratique, on pourra utiliser la relation [15] mais nous pourrons néanmoins utiliser la relation (16). En ne tenant compte que de l'effet de la phase sur la diaphonie on peut écrire :

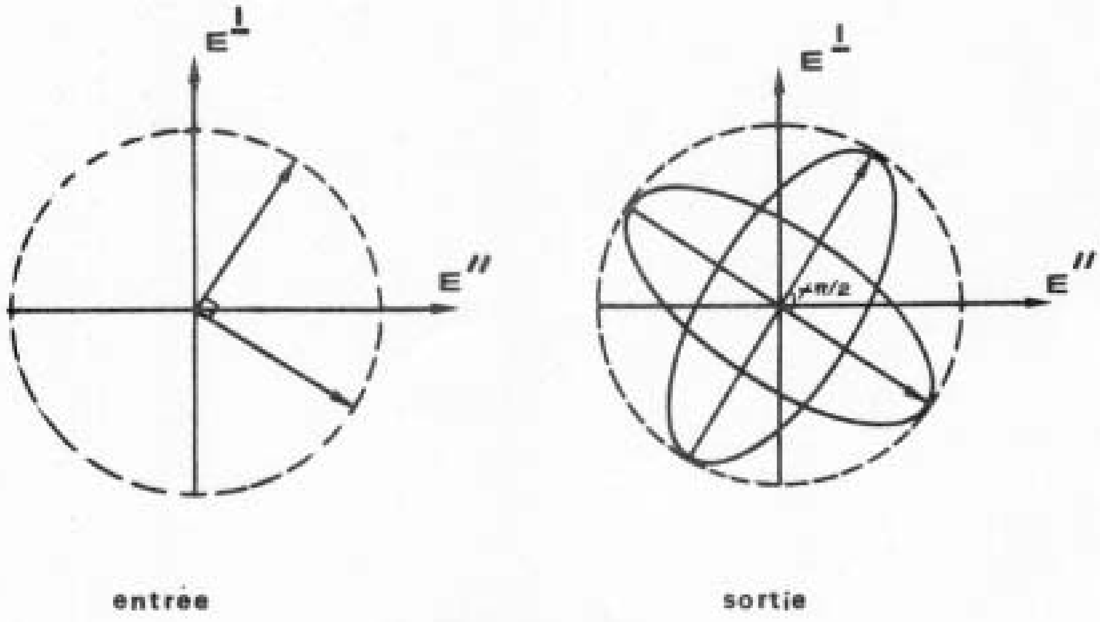
$$b_{11}(s_1)_x = b_0 \cos\theta_0 \, e^{-j\gamma_{11}^{//} s_1/a}$$

$$b_{11}(s_1)_y = b_0 \sin\theta_0 \, e^{-j\gamma_{11}^{\perp} s_1/a} \qquad (17)$$

Examinons le comportement de deux ondes polarisées rectilignement suivant des directions perpendiculaires dans une ligne de transmission présentant un coude.

. si à l'entrée les deux plans de polarisation sont confondus avec les deux directions privilégiées ($E^{//}$ et $E^{\perp}$), à la sortie les deux plans de polarisations restent perpendiculaires et les deux ondes conservent leur polarisation rectiligne. Ces ondes seront atténuées suivant les courbes données précédemment et il n'y aura pas de diaphonie.

. si à l'entrée les deux plans de polarisation ne sont pas confondus avec $E^{//}$ et $E^{\perp}$ à la sortie les ondes auront des polarisations elliptiques avec des grands axes presque orthogonaux. Il apparaît alors de la diaphonie que nous allons évaluer (fig. 39).



- Fig. 39 -

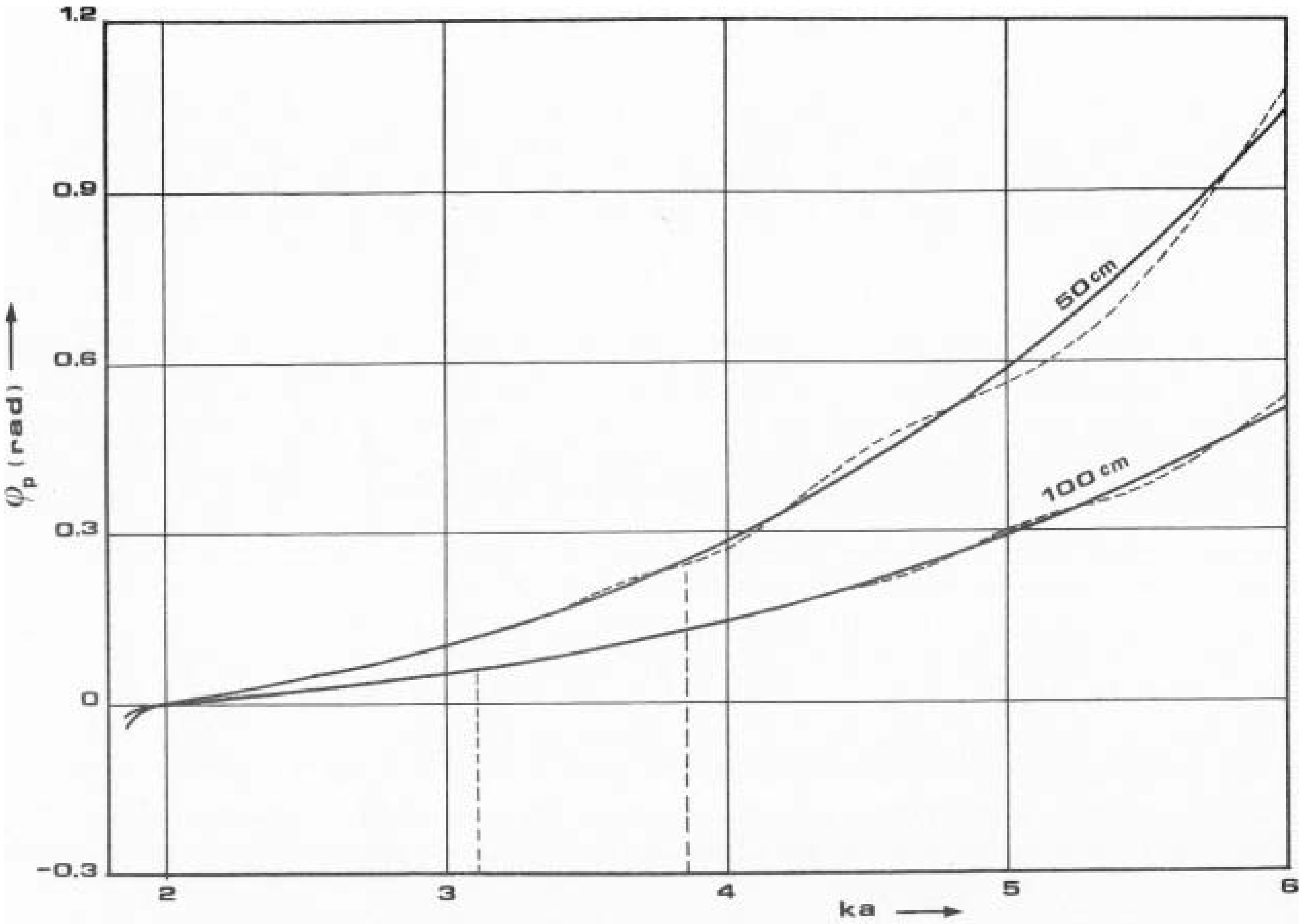


Fig.40 - Evolution de la différence de phase ϕ_p entre les deux polarisations en fonction de la fréqu
normalisée ka pour un coude à 90°.

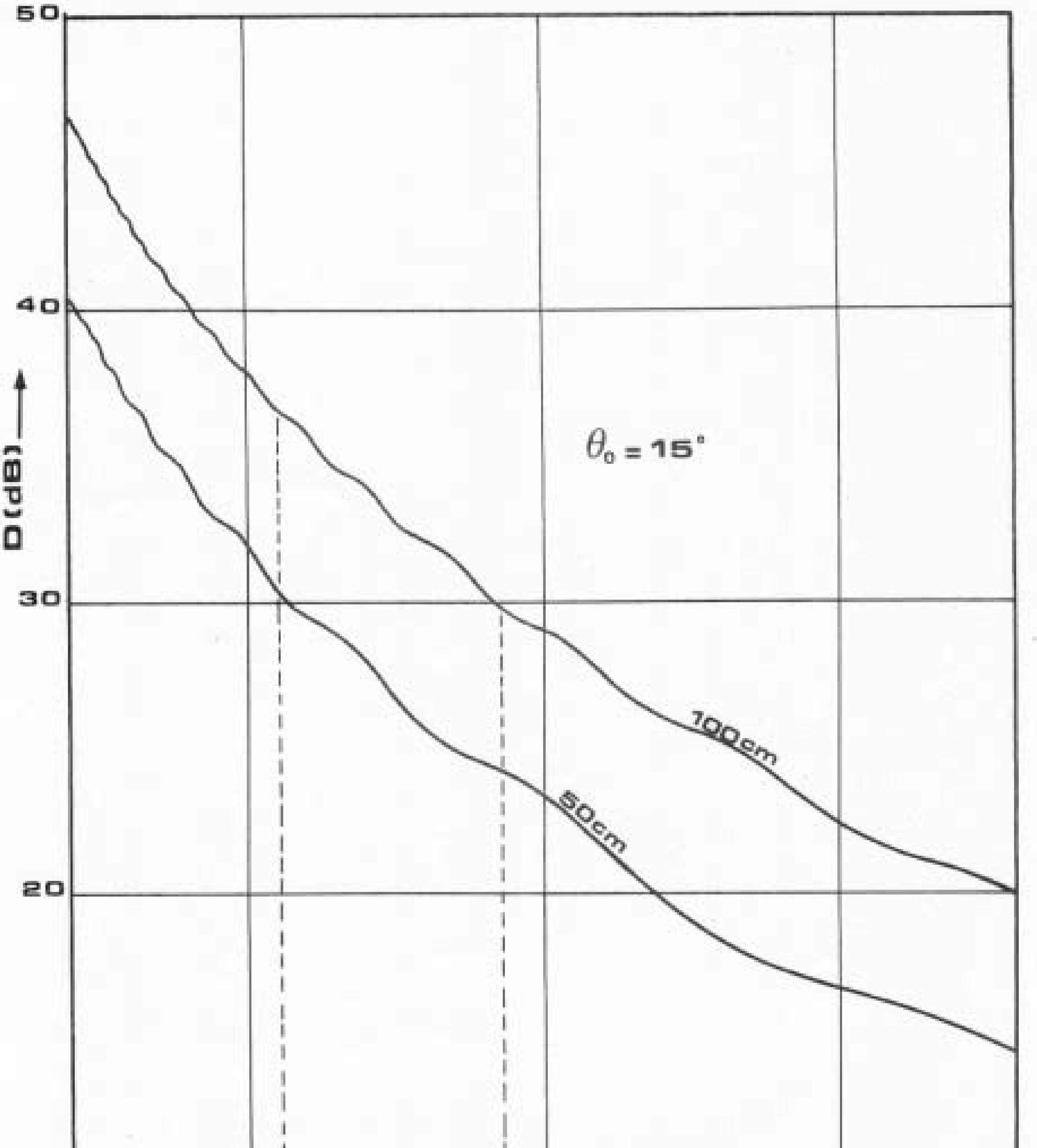


Fig.41 - Affaiblissement diaphonique en fonction de la fréquence normalisée ka pour deux rayons de courbure 50 et 100 cm. Angle d'orientation du plan de polarisation θ_0 = 15 °

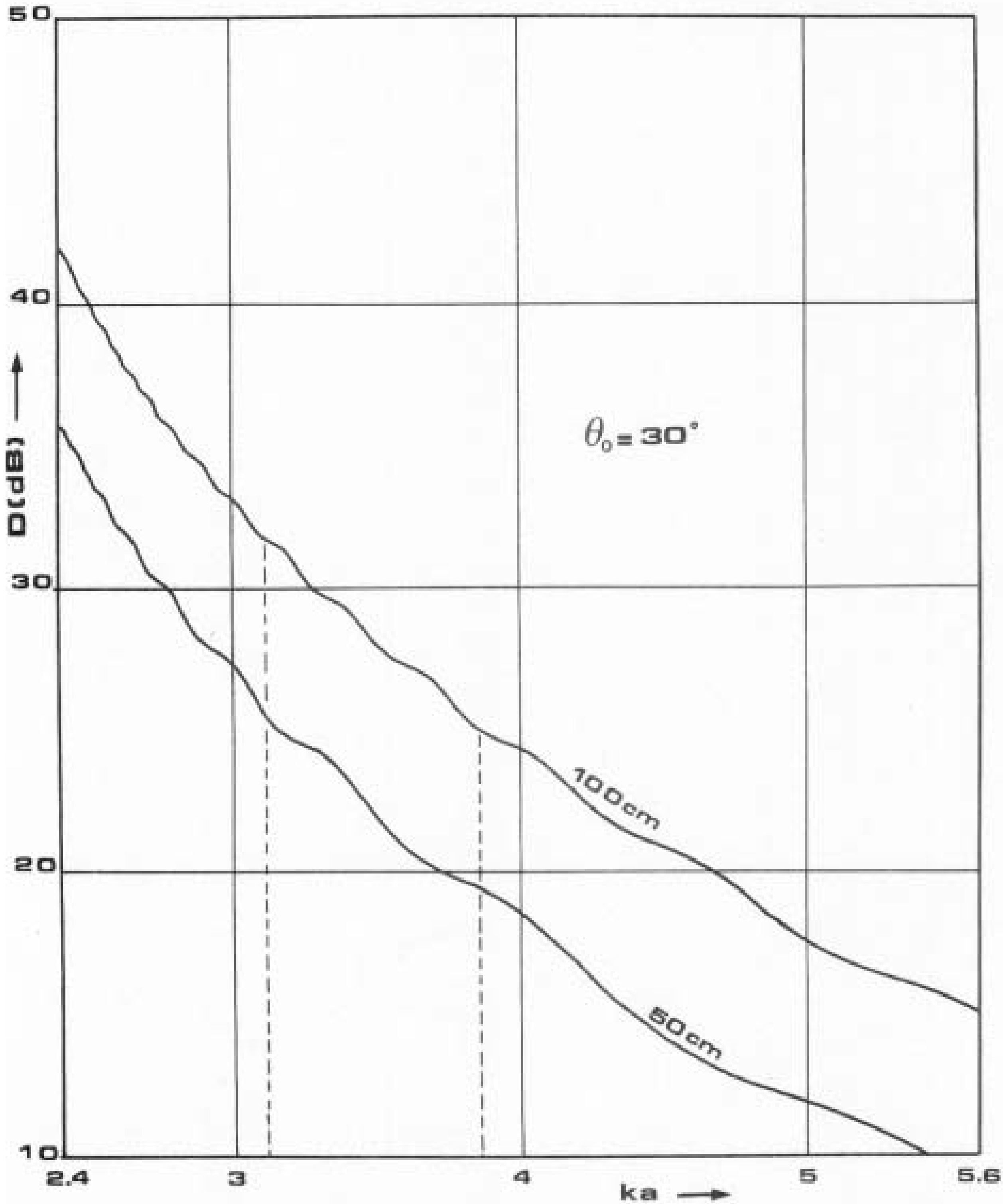


Fig. 42 - Affaiblissement diaphonique en fonction de la fréquence normalisée ka pour deux rayons de courbure 50 et 100 cm. Angle d'orientation du plan de polarisation θ_0 = 30°

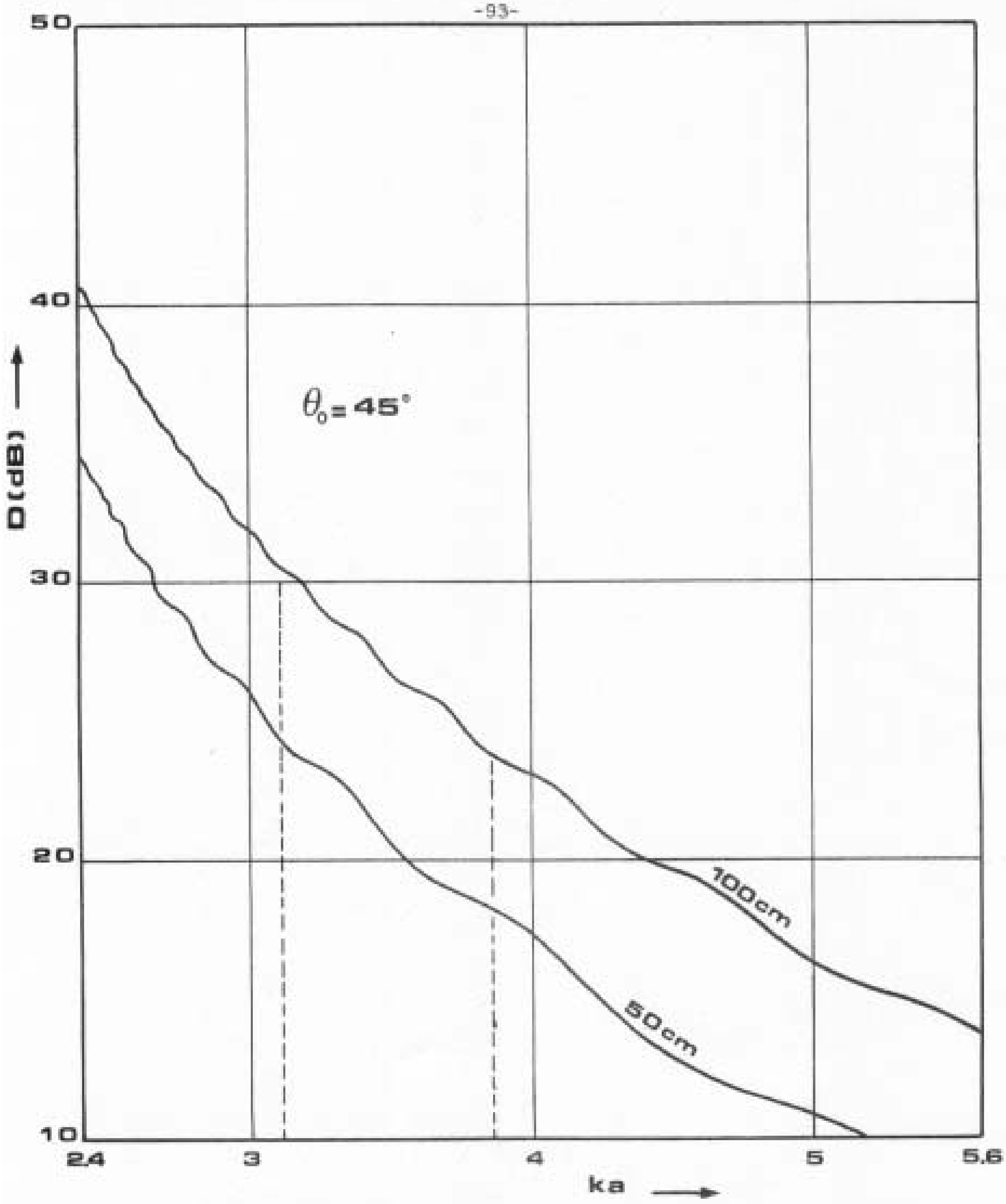


Fig.43 : Affaiblissement diaphonique en fonction de la fréquence normalisée ka pour deux rayons de courbure 50 et 100 cm. Angle d'orientation du plan de polarisation $\theta_0 = 45°$

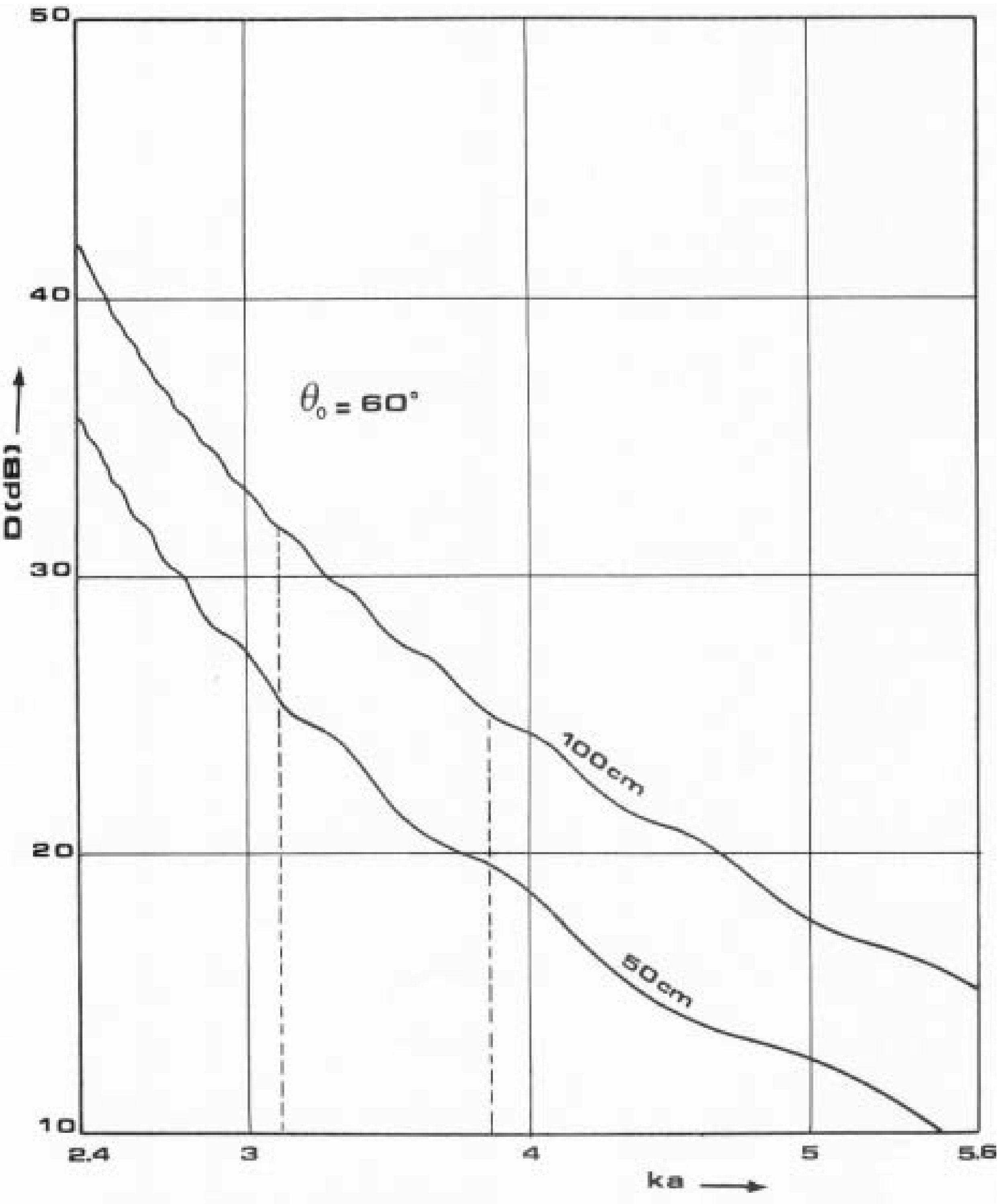


Fig.44 - Affaiblissement diaphonique en fonction de la fréquence normalisée ka pour deux rayons de courbure 50 et 100 cm. Angle d'orientation du plan de polarisation θ_0 = 60°

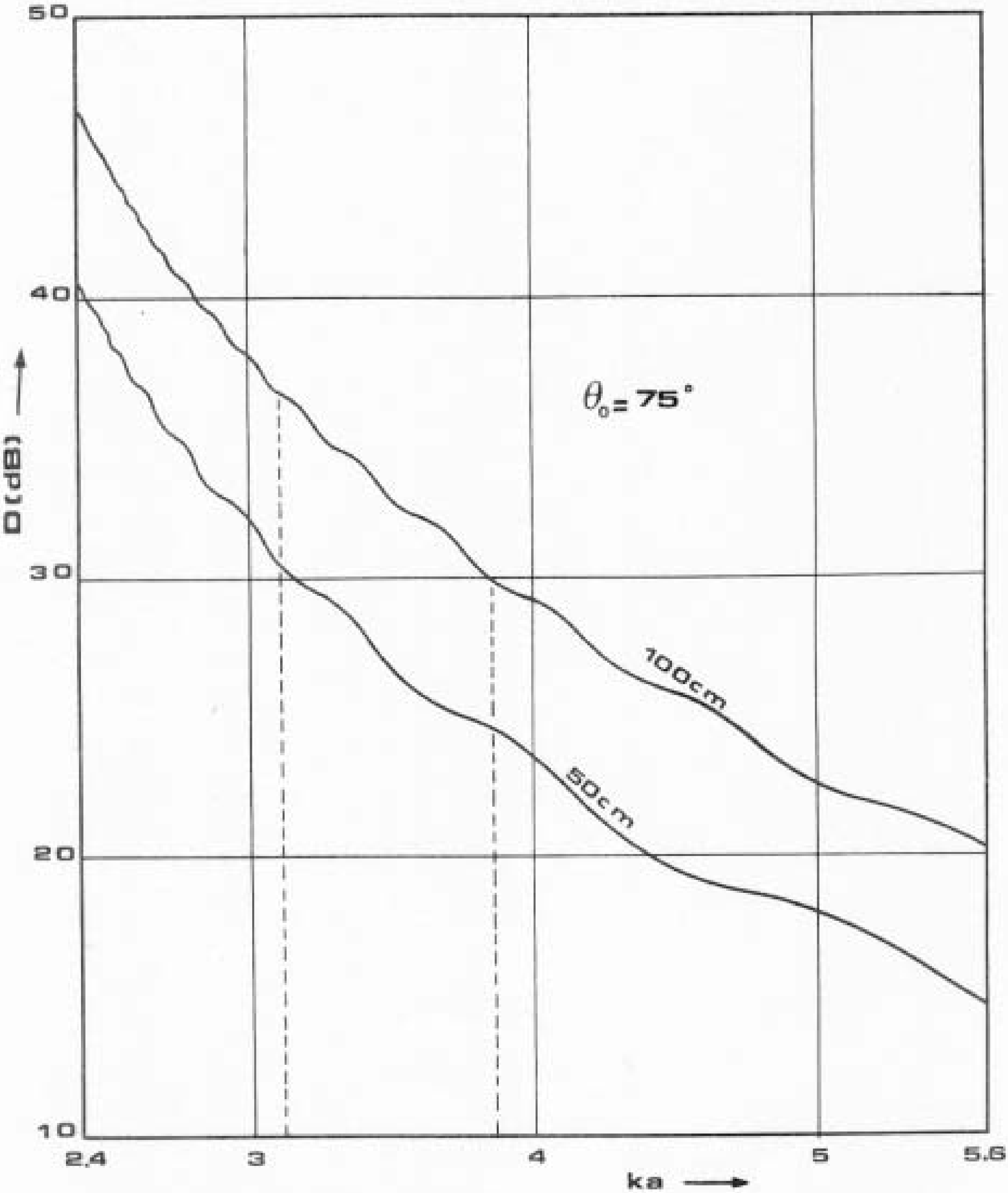


Fig.45 - Affaiblissement diaphonique en fonction de la fréquence normalisée ka pour deux rayons de courbure 50 et 100 cm. Angle d'orientation du plan de polarisation $\theta_0 = 75°$.

2.6.2. Calcul de la diaphonie

A la sortie du coude, l'angle des deux grands axes des ellipses est toujours très proche de 90°. Par exemple pour un coude à 90° et un rayon de courbure de 100 cm l'écart angulaire est inférieur à 0,5 ° et pour un rayon de courbure de 50 cm il reste inférieur à 1° dans la bande de fréquence utile. Nous pouvons donc négliger cette rotation et définir l'affaiblissement diaphonique comme :

$$D = - 20 \log \frac{\text{signal parasite}}{\text{signal utile}} = - 20 \log \frac{\text{petit axe de l'ellipse}}{\text{grand axe de l'ellipse}}$$

Les figures (41) à (45) présentent l'évolution de la diaphonie en fonction de la fréquence normalisée ka, suivant l'angle du plan de polarisation par rapport à $E^{//}$ pour un coude à 90° de rayon de courbure 100 et 50 cm. La diaphonie est maximum pour un angle de 45°. L'affaiblissement diaphonique est inférieur à 30 dB.

2.7. Conclusion

Les résultats obtenus montrent que les pertes additionnelles dues à un coude de rayon de courbure 100 cm pour le guide WC109 restent nettement inférieures à 0,1 dB pour les deux polarisations. Dans le cas de deux coudes successifs séparés par un tronçon de guide les pertes additionnelles sont encore admissibles puisque elles sont inférieures à 0,2 dB dans la bande utile. Il en est de même de l'ondulation du temps de groupe pour un ou deux coudes. Par contre, les valeurs obtenues pour l'affaiblissement diaphonique sont inférieures à 30 dB. Donc la possibilité d'exploitation de deux polarisations dans un guide circulaire non rigide doit être écartée. Pour diminuer la diaphonie, il faut pouvoir imposer la position des plans de polarisation à l'entrée des coudes : les deux plans de polarisation doivent être proches ou confondus avec les plans de symétrie.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette étude a abouti à une connaissance concrète et approfondie de la propagation du mode TE_{11} dans un guide circulaire courbé. Notre contribution a permis de déterminer les principales caractéristiques électromagnétiques à la sortie des coudes, en utilisant deux méthodes de résolution : l'une analytique (méthode de perturbation) et l'autre numérique (méthode matricielle).

L'analyse théorique menée à partir des équations de Maxwell et du développement du champ électromagnétique en modes propres (Ch. II) a permis de mettre en évidence les systèmes d'équations différentielles couplées vérifiées par les différents modes susceptibles de se propager dans un guide circulaire courbé. Nous avons donc montré que :

- Il existe deux directions de propagation privilégiées, l'une parallèle au plan de symétrie et l'autre perpendiculaire à ce plan.

- Selon la direction, le mode TE_{11} se couple directement :
  . avec les modes TE_{2q}, TE_{oq}, TM_{2q} pour la polarisation perpendiculaire
  . avec les modes TM_{oq}, TE_{2q}, TM_{2q} pour la polarisation parallèle

- Les coefficients de couplage dépendent de la fréquence normalisée ka et sont proportionnels au rapport a/R.

La résolution de ces systèmes à partir des méthodes de perturbation limitées à l'ordre deux (Ch. III) a conduit aux expressions analytiques des constantes de propagation à l'intérieur du guide courbé.

L'application de conditions aux limites à l'entrée et à la sortie d'un coude nous a permis de déduire les expressions de l'amplitude et de la puissance transmise du mode TE_{11} en fonction des paramètres géométriques.

Au cours de cette étude nous avons montré que :

. l'influence de la perturbation de la structure sur la constante de propagation et l'amplitude du mode TE_{11} est d'ordre deux.

. les constantes de propagation à l'intérieur du coude sont différentes suivant les deux directions privilégiées ainsi que les coefficients de transmission.

La comparaison de deux méthodes a permis de montrer que :

. la méthode des perturbations limitée à l'ordre deux donne des résultats satisfaisants pour un rayon de courbure de 50 cm lorsque la fréquence normalisée ka est inférieure à 3,92 (soit 13,47 GHz) pour le guide circulaire WC 109.

. une méthode d'analyse numérique comme, par exemple, celle exposée dans le chapitre IV, permet de déterminer les caractéristiques électromagnétiques pour des rayons de courbure inférieurs à 50 cm.

L'utilisation de guides non rigides pour une liaison feeder dans la bande de fréquence 10,7 - 13,25 GHz est donc possible car les pertes additionnelles et l'ondulation du temps de propagation de groupe sont dans les limites admissibles : pertes additionnelles inférieures à 0,1 dB par coude et ondulation du temps de propagation de groupe inférieure à 0,5 ns.

Dans le cas du transport de deux polarisation, il apparaît de la diaphonie à la sortie des coudes. Cette diaphonie, on a montré qu'elle est provoquée essentiellement par les vitesses de phases différentes suivant les deux directions privilégiées. Ainsi un mode TE_{11} polarisé rectilignement à l'entrée d'un coude aura une polarisarion elliptique à la sortie. Les résultats obtenus donnent un affaiblissement diaphonique inférieur à 30 dB, ce qui rend difficile l'exploitation de deux polarisations sauf dans dans des cas bien particuliers où les deux polarisations sont proches ou confondues avec les deux directions privilégiées.

Rien n'est aussi pratique qu'u
bonne théorie ".

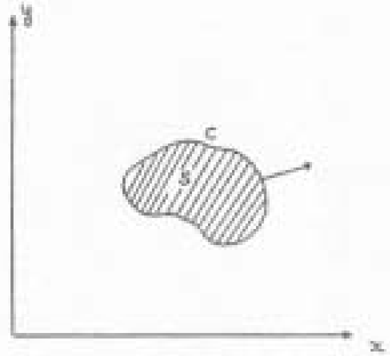
K. LEVIN

ANNEXE

ANNEXE A

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS PROPRES ET DES VECTEURS PROPRES APPLICATION AU GUIDE CIRCULAIRE DE RAYON a.

On s'intéresse aux fonctions de deux variables (x,y) ou (ρ, θ) définies dans un domaine S limité par un contour fermé C et qui vérifient l'équation :



$$\nabla_t^2 f + k^2 f = 0 \qquad (1)$$

1. Définition et propriétés des fonctions propres

1.1. Fonctions propres de type Dirichlet $\phi_{mp}(\rho, \theta)$

L'équation $\nabla_t^2 \phi + k^2 \phi = 0$ avec $\phi = 0$ sur C, n'a de solutions que pour certaines valeurs k_{mp} de k appelées valeurs propres. Les solutions correspondantes ϕ_{mp} sont appelées fonctions propres de type Dirichlet. m et p sont des nombres entiers permettant de classer ces fonctions propres.

Les fonctions propres de type Dirichlet vérifient :

$$\nabla_t^2 \phi_{mp} + k_{mp}^2 \phi_{mp} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \phi_{mp} = 0 \text{ sur } C \qquad (2)$$

1.2. Fonctions propres de type Neumann $\Psi_{mp}(\rho, \theta)$

L'équation $\nabla_t^2 \Psi + \ell^2 \Psi = 0$ avec $\partial \Psi / \partial n = 0$ sur C ($\vec{n}$ normale à C dans le plan de S et dirigée vers l'extérieur de S), n'a de solutions que pour certaines valeurs ℓ_{mp} de ℓ appelées valeurs propres. Les solutions correspondantes Ψ_{mp} sont appelées fonctions propres de type Neumann.

Les fonctions propres de type Neumann vérifient :

$$\nabla_t^2 \ \Psi_{mp} + \ell^2_{mp} \Psi_{mp} = 0 \quad \text{avec} \quad \partial\Psi / \partial n = 0 \text{ sur } C \tag{3}$$

2. Orthogonalité des fonctions propres

En l'absence de dégénérescence ($i \neq j$) on a les relations suivantes :

$$\int_S \varphi_i \varphi_j \, ds = \int_S \Psi_i \Psi_j \, ds = \delta_{ij}$$

$$\int_S (\vec{grad}_t \varphi_i \cdot \vec{grad}_t \varphi_j) \, ds = \int_S (\vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t \varphi_i) \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t \varphi_j) \, ds = k_j^2 \delta_{ij}$$

$$\int_S (\vec{grad}_t \Psi_i \cdot \vec{grad}_t \Psi_j) \, ds = \int_S (\vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t \Psi_i) \cdot (\vec{u}_z \wedge grad \, \Psi_j) ds = \ell_j^2 \delta_{ij} \tag{4}$$

$$\int_S \vec{grad}_t \varphi_i \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t \Psi_j) ds = \int_S \vec{grad}_t \Psi_i \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{grad}_t \varphi_i) \, ds = 0$$

3. Développement d'une fonction scalaire F quelconque

On peut montrer que les fonctions ϕ_{mp}, Ψ_{mp} constituent deux ensembles complets de fonctions orthogonales permettant de développer une fonction F quelconque définie dans S, même si F ne vérifie pas les conditions aux limites imposées aux fonctions propres. Les propriétés d'orthogonalité permettent de déterminer facilement les coefficients des développements :

$$F = \sum_m \sum_p \alpha_{mp} \varphi_{mp} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_{mp} = \int_S F \varphi_{mp} \, ds$$
$$F = \sum_m \sum_p \beta_{mp} \Psi_{mp} \qquad \text{avec} \qquad \beta_{mp} = \int_S F \Psi_{mp} \, ds \tag{5}$$

Les fonctions propres ϕ_{mp} et Ψ_{mp} dépendent des coordonnées transversales (x, y ou ρ, θ). Par conséquent, si F dépend des coordonnées transversales et de z, les coefficients α_{mp} et β_{mp} seront fonctions de z.

4. Définition et propriétés des vecteurs propres

A partir des fonctions ϕ_{mp} et Ψ_{mp} il est possible de construire deux ensembles complets de vecteurs propres permettant le développement d'un vecteur $\vec{A}$ quelconque du plan transversal.

4.1. Vecteurs propres de type "électrique"

Ce sont les solutions de $\nabla_t^2 \vec{a} + \lambda^2 \vec{a} = 0$ avec $\vec{n} \wedge \vec{a} = 0$ sur c.

On distingue parmi ces solutions

1) les vecteurs propres "électriques irrotationnels" $\vec{\mathrm{grad}}_t\, \phi_{mp}$

2) les vecteurs propres "électriques solénoïdaux" $\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\, \Psi_{mp}$

Le développement d'un vecteur transversal $\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{A} = \sum_m \sum_p a_{mp}\, \vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p b_{mp} \left(\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\, \Psi_{mp}\right) \qquad (6)$$

4.2. Vecteurs propres de type "magnétique"

Ce sont les solutions de $\nabla_t^2 \vec{a} + \psi^2 \vec{a} = 0$ avec $\vec{n} . \vec{a} = 0$ sur c.

On distingue parmi ces solutions

1) les vecteurs propres "magnétiques irrotationnels" $\vec{\mathrm{grad}}_t\, \Psi_{mp}$

2) les vecteurs propres "magnétiques solénoïdaux" $\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\, \phi_{mp}$

Le développement d'un vecteur transversal s'écrit :

$$\vec{A} = \sum_m \sum_p \alpha_{mp} \left(\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp}\right) + \sum_m \sum_p \beta_{mp}\, \vec{\mathrm{grad}}_t\, \Psi_{mp} \qquad (7)$$

5. Calcul des coefficients du développement

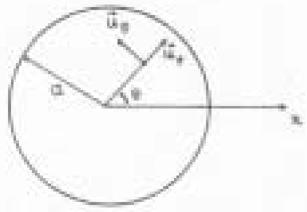
Les coefficients se calculent à l'aide des relations d'orthogonalité entre gradients :

$$a_{mp} = \frac{1}{k_{mp}^2} \int_s \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp}\, ds \quad , \quad b_{mp} = \frac{1}{\ell_{mp}^2} \int_s \vec{A} \cdot \left(\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\, \Psi_{mp}\right) ds \qquad (8)$$

$$\alpha_{mp} = \frac{1}{k_{mp}^2} \int \vec{A} \cdot \left(\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp}\right) ds \ , \quad \beta_{mp} = \frac{1}{\ell_{mp}^2} \int_s \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{grad}}_t\, \Psi_{mp}\, ds$$

Les développements s'appliquent à un vecteur $\vec{A}$ transversal. Si $\vec{A}_t$ ne dépend que de x et y, les coefficients a_{mp}, b_{mp}, α_{mp}, β_{mp} sont des constantes. Si $\vec{A}_t$ dépend de x,y,z, les coefficients dépendent de z.

6. Application au cercle de rayon a



Les fonctions propres sont calculées par la méthode de séparation des variables. Les vecteurs propres électriques et magnétiques se déduisent des fonctions propres.

$$K_{mp} = \frac{u_{mp}}{a} \qquad m = 0,1,2 \ldots\ldots \; p = 1,2,3 \ldots\ldots \quad u_{mp} \text{ pième racine de } J_m$$

$$\varphi_{mp} = \frac{(\varepsilon_m/\pi)^{1/2}}{a\,J_{m+1}(u_{mp})}\, J_m\!\left(u_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_m = \begin{cases}1\;, & m=0\\ 2\;, & m\neq 0\end{cases}$$

$$\vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp} = \frac{(\varepsilon_m/\pi)^{1/2}}{a\,J_{m+1}(u_{mp})}\left[\frac{u_{mp}}{a}J'_m\!\left(u_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\rho + \frac{m}{\rho}J_m\!\left(u_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ -\sin m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\theta\right]$$

$$\vec{u}_z\wedge\vec{\mathrm{grad}}_t\,\varphi_{mp} = \frac{(\varepsilon_m/\pi)^{1/2}}{a\,J_{m+1}(u_{mp})}\left[-\frac{m}{\rho}J_m\!\left(u_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ -\sin m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\rho + \frac{u_{mp}}{a}J'_m\!\left(u_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\theta\right]$$

$$\ell_{mp} = \frac{v_{mp}}{a} \qquad m = 0,1,2 \ldots\ldots \; p = 1,2,3 \ldots\ldots \quad v_{mp} \text{ pième racine de } J'_m$$

$$\psi_{mp} = \frac{v_{mp}(\varepsilon_m/\pi)^{1/2}}{a\sqrt{v_{mp}^2 - m^2}\,J_m(v_{mp})}\, J_m\!\left(v_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}$$

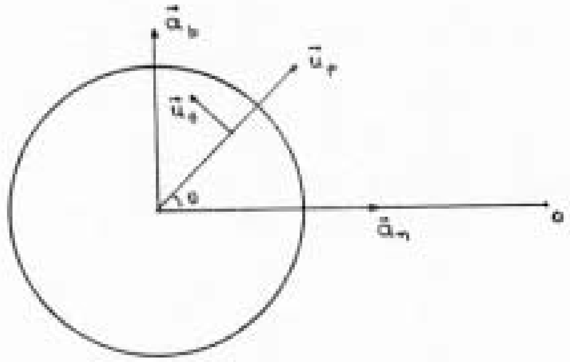
$$\vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp} = \frac{v_{mp}(\varepsilon_m/\pi)^{1/2}}{a\sqrt{v_{mp}^2 - m^2}\,J_m(v_{mp})}\left[\frac{v_{mp}}{a}J'_m\!\left(v_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\rho + \frac{m}{\rho}J_m\!\left(v_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ -\sin m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\theta\right]$$

$$\vec{u}_z\wedge\vec{\mathrm{grad}}_t\,\psi_{mp} = \frac{v_{mp}(\varepsilon_m/\pi)^{1/2}}{a\sqrt{v_{mp}^2 - m^2}\,J_m(v_{mp})}\left[-\frac{m}{\rho}J_m\!\left(v_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ -\sin m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\rho + \frac{v_{mp}}{a}J'_m\!\left(v_{mp}\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}\vec{u}_\theta\right]$$

ANNEXE B

RELATIONS ENTRE COORDONNÉES TOROIDALES ET COORDONNÉES CYLINDRIQUES. ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DU GUIDE COURBÉ.

Soit $\vec{a}_n$, $\vec{a}_b$, $\vec{a}_t$ le vecteur tangentiel unitaire, le vecteur normal unitaire et le vecteur binormal unitaire respectivement du système de coordonnées toroïdales et $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_s$ les vecteurs unitaires du système de coordonnées cylindriques



entre les vecteurs unitaires du système toroïdal, il existe les relations :

$$\frac{d\vec{a}_t}{ds} = \frac{1}{R}\vec{a}_n \quad , \qquad \frac{d\vec{a}_n}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{a}_t \, , \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\vec{a}_b}{ds} = 0$$

On peut passer par le système cylindrique au système toroïdal à l'aide des équations suivantes :

$$\vec{u}_\rho = \vec{a}_n \cos\theta + \vec{a}_b \sin\theta \qquad (1.2)$$

$$\vec{u}_\theta = -\vec{a}_n \sin\theta + \vec{a}_b \cos\theta$$

En dérivant les équations (1.2) on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{ds} = -\frac{\vec{a}_t}{R}\cos\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{ds} = \frac{\vec{a}_t}{R}\sin\theta \qquad (1.3)$$

$$\frac{d\vec{u}_s}{ds} = \frac{\vec{a}_n}{R}$$

A partir des équations précédentes on peut calculer la dérivée partielle du vecteur propre $\vec{\mathrm{grad}}_t\, \phi_{mp}$. Cette expression va nous servir par la suite.

Le vecteur propre $\vec{\mathrm{grad}}_t\, \phi_{mp}$ dans le système de coordonnées cylindriques s'exprime par la relation suivante :

$$\vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp} = \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \qquad (1.4)$$

On dérive cette équation par rapport à s. Donc on a :

$$\frac{\partial}{\partial s}\vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp} = \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho}\frac{\partial \vec{u}_\rho}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta}\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial s} \qquad (1.5)$$

A l'aide des expressions (1.3) on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial s}\vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp} = \frac{\vec{a}_t}{R}\left(-\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho}\cos\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta}\sin\theta\right) \qquad (1.6)$$

qui implique la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial s}\vec{\mathrm{grad}}_t\, \varphi_{mp} = \frac{\vec{a}_t}{R}\left(\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta}\vec{u}_\theta\right)\cdot\left(-\vec{u}_\rho\cos\theta + \vec{u}_\theta\sin\theta\right) \qquad (1.7)$$

La combinaison de (1.2) nous donne :

$$-\vec{u}_\rho\cos\theta + \vec{u}_\theta\sin\theta = -\vec{a}_n \qquad (1.8)$$

En remplaçant les relations (1.4), (1.8) dans (1.7), on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} = - \frac{1}{R} \left[\vec{a}_t \left(\vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_n \right) \right] \qquad (1.9)$$

mais on a aussi la relation :

$$\vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} \wedge \left(\vec{a}_t \wedge \vec{a}_n \right) = \vec{a}_t \left(\vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_n \right) - \left(\vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_t \right) \vec{a}_n$$

qui implique la relation suivante :

$$\vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} \wedge \vec{a}_b = \vec{a}_t \left(\vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_n \right)$$

Donc la relation (1.9) devient :

$$\frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} = \frac{1}{R} \left(\vec{a}_b \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t \, \varphi_{mp} \right) \qquad (1.10)$$

On a une relation similaire pour le vecteur $\vec{\mathrm{grad}}_t \ \psi_{mp}$:

$$\frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathrm{grad}}_t \, \psi_{mp} = \frac{1}{R} \left(\vec{a}_b \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t \, \psi_{mp} \right) \qquad (1.11)$$

2. Etablissement des équations du guide courbé

Partons de l'équation de Maxwell :

$$\mathrm{rot} \, \vec{E} = -j\omega\mu \, H \qquad (2.1)$$

Multiplions par $\vec{u}_s \ \psi_{mp}$ et intégrons sur la surface s de la section droite du guide. On tient toujours compte des expressions des coefficients des développements en fonctions propres et en vecteurs propres qui apparaissent dans l'Annexe (A).

$$\int_s \psi_{mp} \vec{u}_s \cdot \mathrm{rot} \vec{E} \, ds = -j\omega\mu \int_s \vec{H} \cdot \vec{u}_s \, \psi_{mp} \, ds = -j\omega\mu \, \gamma_{mp} \qquad (2.2)$$

A l'aide de l'identité :

$$\mathrm{rot}(\Psi_{mp}\vec{E}) = \Psi_{mp}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} + \vec{\mathrm{grad}}_t\,\Psi_{mp} \wedge \vec{E} \tag{2.3}$$

l'équation (2.2.) devient :

$$\int_s \mathrm{rot}(\Psi_{mp}\vec{E})\cdot\vec{u}_s\,ds - \int_s (\vec{\mathrm{grad}}_t\Psi_{mp}\wedge\vec{E})\cdot\vec{u}_s\,ds = -j\omega\mu\,\gamma_{mp} \tag{2.4}$$

D'après le théorème de STOKES qui s'applique au vecteur $(\Psi_{mp}\,\vec{E})$ on a :

$$\int_c \Psi_{mp}\vec{E}\cdot\vec{t}\,dc - \int_s \vec{E}\cdot(\vec{u}_s\wedge\mathrm{grad}_t\Psi_{mp})\,ds = -j\omega\mu\,\gamma_{mp} \tag{2.5}$$

Pour un guide métallique parfait, l'intégrale $\int_c \Psi_{mp}\,\vec{E}.\vec{t}\,dc$ est nulle et l'équation (2.5) s'écrit :

$$b_{mp} - j\frac{\omega\mu}{\ell_{mp}^2}\gamma_{mp} = 0 \tag{2.6}$$

Partons de l'équation de Maxwell :

$$\vec{\mathrm{grad}}_t(h_sE_s)\wedge\vec{u}_s + \vec{u}_s\wedge\frac{\partial\vec{E}_t}{\partial s} = -j\omega\mu\,\vec{H}_t \tag{2.7}$$

qui est la projection de l'équation (2.1) dans le plan transversal.

Multiplions (2.7) par $\vec{\mathrm{grad}}_t\,\Psi_{mp}$ et intégrons sur la surface s :

$$\int_s [\vec{\mathrm{grad}}_t(h_sE_s)\wedge\vec{u}_s]\cdot\vec{\mathrm{grad}}_t\Psi_{mp}\,ds + \int_s\left(\vec{u}_s\wedge\frac{\partial\vec{E}_t}{\partial s}\right)\cdot\vec{\mathrm{grad}}_t\Psi_{mp}\,ds = -j\omega\mu\int_s h_s\vec{H}_t\cdot\vec{\mathrm{grad}}_t\Psi_{mp}\,ds$$

qui implique, grâce à l'identité $(\vec{A}.\vec{B}\wedge\vec{C} = \vec{B}.\vec{C}\wedge\vec{A} = \vec{C}.\vec{A}\wedge\vec{B})$ l'équation suivante :

$$\int_s [\vec{\mathrm{grad}}_t\Psi_{mp}\wedge\vec{\mathrm{grad}}_t(h_sE_s)]\cdot\vec{u}_s\,ds - \int_s \frac{\partial\vec{E}_t}{\partial s}\cdot(\vec{u}_s\wedge\vec{\mathrm{grad}}_t\Psi_{mp})\,ds = -j\omega\mu\int_s h_s\vec{H}_t\cdot\vec{\mathrm{grad}}_t\Psi_{mp}\,ds$$

A l'aide de la relation (2.3) et de l'identité (rot $\vec{grad}$ $\vec{A}$ = 0), l'équation précédente devient :

$$\int_s \text{rot}\left[h_s E_s \,\vec{grad}_t \Psi_{mp}\right].\vec{u}_s\, ds - \int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s}.(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp})\, ds =$$
$$= -j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp}\, ds$$

En appliquant le théorème de STOKES au vecteur (h_s E_s $\vec{grad}_t$ Ψ_{mp}) on a la relation suivante :

$$\int_c h_s E_s \,\vec{grad}_t \Psi_{mp} \cdot \vec{t}\, dc - \int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s}.(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp})\, ds = -j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp}\, ds.$$

pour un guide métallique parfait l'intégrale $\int_c h_s\, E_s\, \vec{grad}_t\, \Psi_{mp}.\vec{t}\, dc$ est nulle.

d'où :

$$\int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s}.(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp})\, ds = j\omega\gamma \int_s \left(1 - \frac{\rho}{R}\cos\theta\right) \vec{H}_t \cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp}\, ds \qquad (2.8)$$

On développe le champ électrique transversal en vecteurs propres et on dérive par rapport à s :

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} = \sum_m \sum_p \frac{\partial a_{mp}}{\partial s} \vec{grad}_t \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p a_{mp} \frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{grad}_t \varphi_{mp}\right) +$$
$$+ \sum_m \sum_p \frac{\partial b_{mp}}{\partial s}(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp}) + \sum_m \sum_p b_{mp}\left[\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial s} \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp} + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial}{\partial s}(\vec{grad}_t \Psi_{mp})\right] \qquad (2.9)$$

En remplaçant dans cette équation les relations (1.10) (1.11), on trouve :

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} = \sum_m \sum_p \frac{\partial a_{mp}}{\partial s} \vec{grad}_t \varphi_{mp} + \frac{1}{R} \sum_m \sum_p a_{mp} (\vec{a}_b \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) +$$
$$+ \sum_m \sum_p \frac{\partial b_{mp}}{\partial s}(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp}) + \frac{1}{R} \sum_m \sum_p b_{mp} (\vec{a}_n \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp}).$$

En multipliant l'équation précédente par ($\vec{u}_s$ $\wedge$ $\vec{grad}_t$ Ψ_{mp}), en intégrant sur la surface s et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres, on déduit :

$$\int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s}.(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp})\, ds = \frac{\partial b_{mp}}{\partial s} \ell^2_{mp} \qquad (2.10)$$

A partir des équations (2.8), (2.10), on trouve :

$$\frac{\partial b_{mp}}{\partial s} \ell^2_{mp} = j\omega\gamma \int_s \vec{H}_t \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} ds - j\omega\gamma \int_s \frac{\rho}{R} \cos\theta \vec{H}_t \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} ds$$

qui implique l'équation suivante :

$$\frac{\partial b_{mp}}{\partial s} - j\omega\gamma \beta_{mp} = -\frac{j\omega\gamma}{\ell^2_{mp}} \int_s \frac{\rho}{R} \cos\theta \vec{H}_t \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} ds \qquad (2.11)$$

On multiplie l'équation (2.7) par $\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \phi_{mp}$ et on intègre sur s

$$\int_s (\vec{grad}_t h_s E_s \wedge \vec{u}_s) \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds + \int_s \left(\vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s}\right) \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds =$$

$$= -j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

A l'aide de l'identité : $(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$, on trouve :

$$-\int_s (\vec{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \vec{grad}_t h_s E_s) ds + \int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} ds = \qquad (2.12)$$

$$= -j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

compte tenu de l'identité de Green :

$$\int_s (h_s E_s \, div \, \vec{grad}_t \varphi_{mp} + \vec{grad}_t (h_s E_s) \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds = \int_c E_s h_s \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial n} dc =$$

$$= \int_c h_s E_s \vec{n} \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} dc = \int_c h_s (\vec{n} \wedge \vec{E}) \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) dc = 0$$

l'équation (2.12) s'écrit :

$$\int_s h_s E_s \, div \, \vec{grad}_t \varphi_{mp} ds + \int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \vec{grad}_t \varphi_{mp} ds = \qquad (2.13$$

$$= -j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

mais la fonction propre ϕ_{mp} vérifie l'équation suivante :

$$div \, \vec{grad}_t \varphi_{mp} + k^2_{mp} \varphi_{mp} = 0 \quad , \quad (\varphi_{mp} = 0 \text{ sur } c)$$

En reportant cette expression dans l'équation (2.12), on trouve :

$$- k_{mp}^2 \int_s h_s E_s \varphi_{mp}\, ds + \int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp}\, ds = = - j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds \qquad (2.14)$$

En multipliant l'équation (2.9) par $\vec{grad}_t\ \phi_{mp}$, en intégrant sur la surface s et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité, on déduit :

$$\int_s \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp}\, ds = \frac{\partial a_{mp}}{\partial s} k_{mp}^2 \qquad (2.15)$$

Par suite l'équation 2.14 se simplifie :

$$- k_{mp}^2 \int_s h_s E_s \varphi_{mp}\, ds + \frac{\partial a_{mp}}{\partial s} k_{mp}^2 = - j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

d'où :

$$\frac{\partial a_{mp}}{\partial s} + j\omega\gamma\, d_{mp} - c_{mp} = \frac{j\omega\gamma}{k_{mp}^2} \int_s \frac{\rho}{R} \cos\theta\, \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds - - \int_s \frac{\rho}{R} \cos\theta\, E_s \varphi_{mp}\, ds \qquad (2.16)$$

Partons de l'équation de Maxwell :

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{E} \qquad (2.17)$$

multiplions par $\vec{u}_s\ \phi_{mp}$ et intégrons sur la surface s :

$$\int_s \mathrm{rot}\, \vec{H} \cdot \vec{u}_s \varphi_{mp}\, ds = j\omega\varepsilon \int_s \vec{E} \cdot \vec{u}_s \varphi_{mp}\, ds \qquad (2.18)$$

compte tenu de la relation suivante :

$$\mathrm{rot}(\varphi_{mp} \vec{H}) = \varphi_{mp}\, \mathrm{rot}\, \vec{H} + \vec{grad}_t \varphi_{mp} \wedge \vec{H}$$

l'équation (2.18) s'écrit :

$$\int_s \mathrm{rot}(\varphi_{mp} \vec{H}) \cdot \vec{u}_s\, ds - \int_s \vec{H} \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) ds = j\omega\varepsilon c_{mp} \qquad (2.19)$$

En appliquant le théorème de STOKES au vecteur $\phi_{mp}\vec{H}$, l'équation (2.19) se simplifie :

$$\int_c \varphi_{mp}\vec{H}\cdot\vec{t}\,dc - \alpha_{mp}k_{mp}^2 = j\omega\varepsilon_{mp}$$

L'intégrale du premier membre étant nulle,elle s'écrit finalement

$$\alpha_{mp} + \frac{j\omega\varepsilon}{k_{mp}^2} = 0$$

Partons de l'équation :

$$\vec{grad}_t(h_s H_s)\wedge\vec{u}_s + \vec{u}_s\wedge\frac{\partial\vec{H}_t}{\partial s} = j\omega\varepsilon\vec{E}_t \qquad (2.20)$$

qui est la projection de l'équation (2.17) dans le plan transversal.

Multiplions par $\vec{grad}_t\ \phi_{mp}$ et intégrons sur la surface s :

$$\int_s(\vec{grad}_t h_s H_s\wedge\vec{u}_s)\cdot\vec{grad}_t\varphi_{mp}\,ds + \int_s\left(\vec{u}_s\wedge\frac{\partial\vec{H}_t}{\partial s}\right)\cdot\vec{grad}_t\varphi_{mp}\,ds = = j\omega\varepsilon\int_s h_s\vec{E}_t\cdot\vec{grad}_t\varphi_{mp}\,ds \qquad (2.21$$

qui implique l'équation suivante :

$$\int_s(\vec{grad}_t\varphi_{mp}\wedge\vec{grad}_t h_s H_s)\cdot\vec{u}_s\,ds - \int_s\frac{\partial\vec{H}_t}{\partial s}\cdot(\vec{u}_s\wedge\vec{grad}_t\varphi_{mp})\,ds = = j\omega\varepsilon\int_s h_s\vec{E}_t\cdot\vec{grad}_t\varphi_{mp}\,ds.$$

A l'aide des deux relations suivantes :

$$rot(h_s H_s\vec{grad}_t\varphi_{mp}) = h_s H_s\,rot\,\vec{grad}_t\varphi_{mp} + \vec{grad}_t\varphi_{mp}\cdot\vec{grad}_t h_s H_s$$

$$rot\,\vec{grad}_t\varphi_{mp} = 0$$

l'équation (2.21) s'écrit :

$$\int_s rot(h_s H_s\vec{grad}_t\varphi_{mp})\cdot\vec{u}_s\,ds - \int_s\frac{\partial\vec{H}_t}{\partial s}\cdot(\vec{u}_s\wedge\vec{grad}_t\varphi_{mp})\,ds = = j\omega\varepsilon\int_s h_s\vec{E}_t\cdot\vec{grad}_t\varphi_{mp}\,ds$$

En appliquant le théorème de STOKES au vecteur (h_s H_s $\vec{grad}_t$ ϕ_{mp}) on a :

$$\int_c h_s H_s \, \vec{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \vec{t} \, dc - \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) \, ds =$$
$$= j\omega\varepsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} \, ds$$

La première intégrale est nulle, donc :

$$- \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) \, ds = j\omega\varepsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} \, ds \qquad (2.22)$$

On développe le champ magnétique transversal en vecteurs propres et on le dérive par rapport à :

$$\frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} = \sum_m \sum_p \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) + \sum_m \sum_p \alpha_{mp} \left[\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial s} \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp} + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial}{\partial s} \vec{grad}_t \varphi_{mp} \right] +$$
$$+ \sum_m \sum_p \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} \vec{grad}_t \psi_{mp} + \sum_m \sum_p \beta_{mp} \frac{\partial}{\partial s} \vec{grad}_t \psi_{mp} .$$

En remplaçant dans cette équation les relations (1.10)(1.11), on arrive à :

$$\frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} = \sum_m \sum_p \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) + \frac{1}{R} \sum_m \sum_p \alpha_{mp} (\vec{a}_n \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp})$$
$$+ \sum_m \sum_p \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} \vec{grad}_t \psi_{mp} + \sum_m \sum_p \beta_{mp} (\vec{a}_b \wedge \vec{grad}_t \psi_{mp}) \qquad (2.23)$$

En multipliant l'équation précédente par ($\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t$ ϕ_{mp}), en intégrant sur la surface s et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres, on déduit la relation suivante :

$$\int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \varphi_{mp}) \, ds = \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} k_{mp}^2 \qquad (2.24)$$

En remplaçant cette intégrale par sa valeur l'équation (2.22) s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{mp} = \frac{j\omega\varepsilon}{k_{mp}^2} \int_s \frac{\rho}{R} \cos\theta \, \vec{E}_t \cdot \vec{grad}_t \varphi_{mp} \, ds \qquad (2.25)$$

On multiplie l'équation (2.20) par $\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \, \Psi_{mp}$ et on intègre sur la surface :

$$\int_s \left(\vec{grad}_t h_s E_s \wedge \vec{u}_s \right) \cdot \left(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp} \right) ds + \int_s \left(\vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \right) \cdot \left(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp} \right) ds =$$

$$= j\omega\varepsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot \left(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp} \right) ds$$

qui implique l'équation suivante :

$$-\int_s \left(\vec{grad}_t \Psi_{mp} \cdot \vec{grad}_t h_s H_s \right) ds + \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp} \, ds = j\omega\varepsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot \left(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp} \right) ds$$

compte tenu de l'identité de Green :

$$\int_s \left[h_s H_s \, \mathrm{div} \, \vec{grad}_t \Psi_{mp} + \vec{grad}_t \Psi_{mp} \cdot \vec{grad}_t h_s H_s \right] ds = \int_c h_s H_s \frac{\partial \Psi_{mp}}{\partial n} \, dc = 0 \qquad (2.26)$$

l'équation (2.25) devient :

$$\int_s h_s H_s \, \mathrm{div} \, \vec{grad}_t \Psi_{mp} \, ds + \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp} \, ds = j\omega\varepsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot \left(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp} \right) ds \qquad (2.27)$$

mais Ψ_{mp} vérifie l'équation :

$$\mathrm{div} \, \vec{grad}_t \Psi_{mp} + \ell^2_{mp} \Psi_{mp} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \Psi_{mp}}{\partial n} = 0 \text{ sur } c \right)$$

l'équation (2.27) s'écrit donc :

$$-\ell^2_{mp} \int_s h_s H_s \Psi_{mp} \, ds + \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp} \, ds = j\omega\varepsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot \left(\vec{u}_s \wedge \vec{grad}_t \Psi_{mp} \right) ds \qquad (2.28)$$

En multipliant l'équation (2.23) par $\vec{grad}_t \, \Psi_{mp}$, en intégrant sur la surface s et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité, on arrive à :

$$\int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \vec{grad}_t \Psi_{mp} \, ds = \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} \ell^2_{mp} \qquad (2.29)$$

l'équation (2.28) d'après la relation (2.29), s'écrit :

$$- \ell_{mp}^2 \int_S h_s H_s \psi_{mp} \, ds + \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} \ell_{mp}^2 = j\omega\varepsilon \int_S h_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t \psi_{mp}) \, ds$$

qui implique l'équation suivante :

$$\frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} - j\omega\varepsilon b_{mp} - \gamma_{mp} = - \frac{j\omega\varepsilon}{\ell_{mp}^2} \int_S \frac{\rho}{R} \cos\theta \, \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \vec{\mathrm{grad}}_t \psi_{mp}) \, ds \qquad (2.30)$$

$$- \int_S \frac{\rho}{R} \cos\theta \, H_s \psi_{mp} \, ds .$$

ANNEXE C

INTÉGRALES DES FONCTIONS DE BESSEL.

$$\int_0^a \rho\, J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^2 u_{2q}}{u_{2q}^2 - u_{1p}^2} J_1(u_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho\, J_1\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^2 u_{1p}}{u_{2q}^2 - u_{1p}^2} J_1(u_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho^2\, J_0\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2 a^3 u_{1p}^3}{u_{2q}\left(u_{2q}^2 - u_{1p}^2\right)^2} J_1(u_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho^2\, J_1\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^3\left(u_{2q}^2 - 3u_{1p}^2\right)}{\left(u_{2q}^2 - u_{1p}^2\right)^2} J_1(u_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$2\int_0^a J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{u_{1p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2\, J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a\, u_{2q} u_{1p}\left(u_{2q}^2 + u_{1p}^2\right)}{\left(u_{2q}^2 - u_{1p}^2\right)^2} J_1(u_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho^2\, J_1'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^3 u_{1p}\left(u_{2q}^2 + u_{1p}^2\right)}{u_{2q}\left(u_{2q}^2 - u_{1p}^2\right)^2} J_1(u_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho^2\, J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2 a^3 u_{1p} u_{2q}}{\left(u_{2q}^2 - u_{1p}^2\right)^2} J_1(u_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho\, J_1\left(\sigma_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2 a^2 u_{1p}}{\sigma_{2q}\left(\sigma_{2q}^2 - u_{1p}^2\right)} J_2(\sigma_{2q})\, J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2a^2}{v_{2q}^2 - u_{1p}^2} J_1(v_{2q}) J_2(u_{1p})$$

$$\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2au_{1p}}{v_{2q}^2 - u_{1p}^2} J_2(v_{2q}) J_2(u_{1p})$$

$$\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2 u_{3p}}{u_{3p}^2 - u_{2q}^2} J_4(u_{3p}) J_3(u_{2q})$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2 u_{3p}}{u_{3p}^2 - u_{2q}^2} J_4(u_{3p}) J_3(u_{2q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2a^3\left[(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2 + u_{2q}^4\right]}{u_{2q}u_{3p}(u_{2q}^2 - u_{3p}^2)^2} J_4(u_{3p}) J_3(u_{2q})$$

$$6\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{u_{2q}u_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a\,u_{2q}u_{3p}(u_{2q}^2 + u_{3p}^2)}{(u_{2q}^2 - u_{3p}^2)^2} J_4(u_{3p}) J_3(u_{2q})$$

$$\int_0^a \rho J_2\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2 u_{2q}}{u_{3p}^2 - u_{2q}^2} J_2(u_{2q}) J_4(u_{3p})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2a^3 u_{2q}u_{3p}}{(u_{2q}^2 - u_{3p}^2)^2} J_2(u_{2q}) J_4(u_{3p})$$

$$\int_0^a \rho J_3\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2 u_{2q}}{v_{1p}(u_{2q}^2 - v_{1p}^2)} J_3(u_{2q}) J_1(v_{1p})$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{u_{2q}^2 - v_{1p}^2} J_3(u_{2q})\, J_1(v_{1p})$$

$$2\frac{v_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a\, u_{2q}}{u_{2q}^2 - v_{1p}^2} J_3(u_{2q})\, J_1(v_{1p})$$

$$\int_0^a \rho J_2\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{3a^2 u_{2q}}{v_{3p}(v_{3p}^2 - u_{2q}^2)} J_2(v_{3p})\, J_3(u_{2q})$$

$$\int_0^a \rho J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{3a^2}{v_{3p}^2 - u_{2q}^2} J_3(v_{3p})\, J_3(u_{2q})$$

$$2\frac{v_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{3a\, u_{2q}}{v_{3p}^2 - u_{2q}^2} J_2(v_{3p})\, J_3(u_{2q})$$

$$\int_0^a \rho J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2a^2}{v_{2q}^2 - u_{3p}^2} J_4(u_{3p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2a^2 u_{3p}}{v_{2q}(v_{2q}^2 - u_{3p}^2)} J_4(u_{3p})\, J_2(v_{2q})$$

$$3\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2a\, u_{3p}}{v_{2q}^2 - u_{3p}^2} J_4(u_{3p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho J_3\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{4a^2 u_{3p}}{v_{4q}(v_{4q}^2 - u_{3p}^2)} J_4(u_{3p})\, J_4(v_{4q})$$

$$\int_0^a \rho\, J_4\!\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_4\!\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{4a^2}{v_{4q}^2 - u_{3p}^2}\, J_4(u_{3p})\, J_4(v_{4q})$$

$$3\frac{v_{4q}}{a}\int_0^a \rho\, J_3\!\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_4'\!\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho\, J_3'\!\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_4\!\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{4a\,u_{3p}}{v_{4q}^2 - u_{3p}^2}\, J_4(u_{3p})\, J_4(v_{4q})$$

$$\int_0^a \rho\, J_1\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^2(2 - v_{2q}^2)}{v_{2q}(v_{2q}^2 - v_{1p}^2)}\, J_1(v_{1p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^3(4v_{1p}^2 + v_{2q}^4 - 3v_{1p}^2 v_{2q}^2)}{v_{2q}^2(v_{2q}^2 - v_{1p}^2)^2}\, J_1(v_{1p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_1\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2a^3(v_{1p}^4 + v_{2q}^2 - 3v_{1p}^2)}{v_{2q}\, v_{1p}\,(v_{2q}^2 - v_{1p}^2)^2}\, J_1(v_{1p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho\, J_2\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2(v_{1p}^2 - 2)}{v_{1p}(v_{2q}^2 - v_{1p}^2)}\, J_1(v_{1p})\, J_2(v_{2q})$$

$$2\int_0^a J_1\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{1p}v_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2'\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2a(v_{2q}^2 + v_{1p}^2 - v_{1p}^2 v_{2q}^2)}{(v_{2q}^2 - v_{1p}^2)^2}\, J_1(v_{1p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_1'\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2a^3(v_{1p}^2 + v_{2q}^2 - v_{2q}^2 v_{1p}^2)}{v_{2q}^2(v_{2q}^2 - v_{1p}^2)^2}\, J_1(v_{1p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_1\!\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\!\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^3(4 - v_{2q}^2 - v_{1p}^2)}{(v_{2q}^2 - v_{1p}^2)^2}\, J_1(v_{1p})\, J_2(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho\, J_1\left(\upsilon_{0q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a\,\upsilon_{0q}}{\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2}\, J_1(\upsilon_{1p})\, J_0(\upsilon_{0q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\left(\upsilon_{0q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^3\left(\upsilon_{0q}^2+\upsilon_{1p}^2\right)}{\left(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2\right)^2}\, J_1(\upsilon_{1p})\, J_0(\upsilon_{0q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_1'\left(\upsilon_{1p}\frac{\rho}{a}\right) J_0'\left(\upsilon_{0q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2a^3\upsilon_{1p}\upsilon_{0q}}{\left(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2\right)^2}\, J_1(\upsilon_{1p})\, J_0(\upsilon_{0q})$$

$$\int_0^a \rho\, J_3\left(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^2\left(\upsilon_{2q}^2-6\right)}{\upsilon_{2q}\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2\right)}\, J_2(\upsilon_{2q})\, J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho\, J_1\left(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2\left(12\upsilon_{2q}^2-6\upsilon_{3p}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2\right)}{\upsilon_{2q}\upsilon_{3p}^2\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2\right)^2}\, J_2(\upsilon_{2q})\, J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\left(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^3\left(-24\upsilon_{2q}^2+12\upsilon_{3p}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2+3\upsilon_{2q}^4\right)}{\upsilon_{2q}^2\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2\right)^2}\, J_2(\upsilon_{2q})\, J_3(\upsilon_{3p})$$

$$6\int_0^a J_2\left(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{\upsilon_{2q}\upsilon_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2'\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2a\left(3\upsilon_{2q}^2+3\upsilon_{3p}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2\right)}{\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2\right)^2}\, J_2(\upsilon_{2q})\, J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho\, J_2\left(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2\left(6-\upsilon_{3p}^2\right)}{\upsilon_{3p}\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2\right)}\, J_2(\upsilon_{2q})\, J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_2\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^3\left(12-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2\right)}{\left(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2\right)^2}\, J_2(\upsilon_{2q})\, J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho J_4\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_4\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2(\upsilon_{3p}^2-12)}{\upsilon_{3p}(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)} J_4(\upsilon_{4q}) J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho J_3\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2(\upsilon_{4q}^2-12)}{\upsilon_{4q}(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)} J_4(\upsilon_{4q}) J_2(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho J_2\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_2\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2(12\upsilon_{4q}^2-24\upsilon_{3p}^2+\upsilon_{4q}^2\upsilon_{3p}^2)}{\upsilon_{3p}\upsilon_{4q}^2(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)} J_4(\upsilon_{4q}) J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2[288(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)-12\upsilon_{4q}^4+\upsilon_{4q}^4\upsilon_{3p}^2]}{\upsilon_{3p}^2\upsilon_{4q}^3(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)} J_4(\upsilon_{4q}) J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^3\{[-72\upsilon_{4q}^4+3\upsilon_{3p}^2\upsilon_{4q}^4+576(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)+24\upsilon_{3p}^2\upsilon_{4q}^2](\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)+24\upsilon_{3p}^2\upsilon_{4q}^4-2\upsilon_{4q}^4\upsilon_{3p}^4\}}{\upsilon_{3p}^2\upsilon_{4q}^4(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2} J_4(\upsilon_{4q}) J_3(\upsilon_{3p})$$

$$12\int_0^a \rho J_3\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_4\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{\upsilon_{3p}\upsilon_{4q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) J_4'\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{2a(6\upsilon_{4q}^2+6\upsilon_{3p}^2-\upsilon_{4q}^2\upsilon_{3p}^2)}{(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2} J_4(\upsilon_{4q}) J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_4\left(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^3(24-\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)}{(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2} J_4(\upsilon_{4q}) J_3(\upsilon_{3p})$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^2 u_{1p}}{u_{0q}^2-u_{1p}^2} J_2(u_{1p}) J_1(u_{0q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2a^3 u_{1p}u_{0q}}{(u_{0q}^2-u_{1p}^2)^2} J_2(u_{1p}) J_1(u_{0q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^3\left(u_{0q}^2 + u_{1p}^2\right)}{\left(u_{0q}^2 - u_{1p}^2\right)^2} \; J_2\left(u_{1p}\right) J_1\left(u_{0q}\right)$$

$$\int_0^a \rho \, J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{u}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = -\frac{a^2}{u_{0q}^2 - v_{1p}^2} \; J_1\left(v_{1p}\right) J_1\left(u_{0q}\right)$$

ANNEXE D

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$\frac{\partial a_{1p}}{\partial s} + j\frac{k^2 - k_{1p}^2}{\omega\varepsilon}\alpha_{1p} = \frac{j\omega\gamma n \tilde{N}_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q \alpha_{2q}\tilde{N}_{2q}\left[2\int_0^a J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) + \frac{u_{1p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$- \frac{jn\tilde{N}_{1p}}{2\omega\varepsilon R}\sum_q \alpha_{2q}\tilde{N}_{2q}k_{2q}^2\int_0^a \rho^2 J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho -$$

$$- \frac{j\omega\gamma n\tilde{N}_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q \beta_{2q}M_{2q}\left[\frac{\sigma_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(\sigma_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(\sigma_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial \alpha_{1p}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{1p} = \frac{j\omega\varepsilon n\tilde{N}_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q a_{2q}\tilde{N}_{2q}\left[2\int_0^a J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{1p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+ \frac{j\omega\varepsilon n\tilde{N}_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q b_{2q}M_{2q}\left[\frac{\sigma_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(\sigma_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(\sigma_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial a_{2q}}{\partial s} + j\frac{k^2 - k_{2q}^2}{\omega\varepsilon}\alpha_{2q} = \frac{j\omega\gamma n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \alpha_{1p}\tilde{N}_{1p}\left[2\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}u_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$- \frac{jn\tilde{N}_{2q}}{2\omega\varepsilon R}\sum_p \alpha_{1p}\tilde{N}_{1p}k_{1p}^2\int_0^a \rho^2 J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho +$$

$$+ \frac{j\omega\gamma n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \alpha_{3p}\tilde{N}_{3p}\left[6\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}u_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$- \frac{jn\tilde{N}_{2q}}{2\omega\varepsilon R}\sum_p \alpha_{3p}\tilde{N}_{3p}k_{3p}^2\int_0^a \rho^2 J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho -$$

$$- \frac{j\omega\gamma n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \beta_{1p}M_{1p}\left[2\frac{\sigma_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(\sigma_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(\sigma_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$- \frac{j\omega\gamma n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \beta_{3p}M_{3p}\left[2\frac{\sigma_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3'\left(\sigma_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(\sigma_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial \alpha_{2q}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{2q} = \frac{j\omega\varepsilon n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p a_{1p}\tilde{N}_{1p}\left[2\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}u_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+ \frac{j\omega\varepsilon n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p a_{3p}\tilde{N}_{3p}\left[6\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}u_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+ \frac{j\omega\varepsilon n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p b_{1p}M_{1p}\left[2\frac{\sigma_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(\sigma_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(\sigma_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+ \frac{j\omega\varepsilon n\tilde{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p b_{3p}M_{3p}\left[2\frac{\sigma_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3'\left(\sigma_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(\sigma_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{3p}}{\partial s} + j\frac{k^2-k_{3p}^2}{\omega\varepsilon}\alpha_{3p} = {} & \frac{j\omega\gamma n \tilde{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q \alpha_{2q}\tilde{N}_{2q}\left[6\int_0^a J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{3p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] - \\
& - \frac{jn\tilde{N}_{3p}}{2\omega\varepsilon R}\sum_q \alpha_{2q}\tilde{N}_{2q}k_{2q}^2\int_0^a \rho^2 J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho - \\
& - \frac{j\omega\gamma n \tilde{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q \beta_{2q}M_{2q}\left[3\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] - \\
& - \frac{j\omega\gamma n \tilde{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q \beta_{4q}M_{4q}\left[3\frac{v_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{3p}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{3p} = {} & \frac{j\omega\varepsilon n \tilde{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q a_{2q}\tilde{N}_{2q}\left[6\int_0^a J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{3p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] + \\
& + \frac{j\omega\varepsilon n \tilde{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q b_{2q}M_{2q}\left[3\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] + \\
& + \frac{j\omega\varepsilon n \tilde{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q b_{4q}M_{4q}\left[3\frac{v_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{1p}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{1p}^2}{\omega\gamma} b_{1p} = &-\frac{j\omega\varepsilon n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q b_{2q} M_{2q} \left[2\int_0^a J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{\upsilon_{1p}\upsilon_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2'\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+\frac{jnM_{1p}}{2\omega\gamma R} \sum_q b_{2q} M_{2q}\,\ell_{2q}^2 \int_0^a \rho^2 J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho - \\
&-\frac{j\omega\varepsilon n M_{1p}}{R\ell_{1p}^2} \sum_q b_{0q} M_{0q} \frac{\upsilon_{1p}\upsilon_{0q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_0'\left(\upsilon_{0q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \\
&+\frac{jnM_{1p}}{\omega\gamma R} \sum_q b_{0q} M_{0q}\,\ell_{0q}^2 \int_0^a \rho^2 J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_0\left(\upsilon_{0q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho - \\
&-\frac{j\omega\varepsilon n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q a_{2q} N_{2q} \left[\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2'\left(u_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{\upsilon_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_{1p}}{\partial s} - j\omega\gamma\beta_{1p} = &-\frac{j\omega\gamma n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q \beta_{2q} M_{2q} \left[2\int_0^a J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{\upsilon_{1p}\upsilon_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2'\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
&-\frac{j\omega\gamma n M_{1p}}{R\ell_{1p}^2} \sum_q \beta_{0q} M_{0q} \frac{\upsilon_{1p}\upsilon_{0q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_0'\left(\upsilon_{0q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \\
&+\frac{j\omega\gamma n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q \alpha_{2q} N_{2q} \left[\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2'\left(u_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{\upsilon_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{0q}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{0q}^2}{\omega\gamma} b_{0q} = &-\frac{j\omega\varepsilon n M_{0q}}{R\ell_{0q}^2} \sum_p b_{1p} M_{1p} \frac{\upsilon_{0q}\upsilon_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_0'\left(\upsilon_{0q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \\
&+\frac{jnM_{0q}}{\omega\gamma R} \sum_p b_{1p} M_{1p}\,\ell_{1p}^2 \int_0^a \rho^2 J_0\left(\upsilon_{0q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial b_{0q}}{\partial s} - j\omega\gamma\beta_{0q} = -\frac{j\omega\gamma n M_{0q}}{R\ell_{0q}^2} \sum_p \beta_{1p} M_{1p} \frac{\upsilon_{0q}\upsilon_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_0'\left(\upsilon_{0q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{2q}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{2q}^2}{\omega\gamma} b_{2q} = &-\frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p b_{1p} M_{1p} \left[2\int_0^a J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{\upsilon_{2q}\upsilon_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1'\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+\frac{jnM_{2q}}{2\omega\gamma R} \sum_p b_{1p} M_{1p}\,\ell_{1p}^2 \int_0^a \rho^2 J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1\left(\upsilon_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho - \\
&-\frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p b_{3p} M_{3p} \left[6\int_0^a J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_3\left(\upsilon_{3p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{\upsilon_{2q}\upsilon_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_3'\left(\upsilon_{3p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+\frac{jnM_{2q}}{2\omega\gamma R} \sum_p b_{3p} M_{3p}\,\ell_{3p}^2 \int_0^a \rho^2 J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_3\left(\upsilon_{3p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho - \\
&-\frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p a_{1p} N_{1p} \left[2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1'\left(u_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{\upsilon_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
&-\frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p a_{3p} N_{3p} \left[2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_3'\left(u_{3p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho + 3\frac{\upsilon_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(\upsilon_{2q}\tfrac{\rho}{a}\right) J_3\left(u_{3p}\tfrac{\rho}{a}\right) d\rho \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_{2q}}{\partial s} - j\omega\gamma\beta_{2q} = & -\frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2}\sum_p \beta_{1p}M_{1p}\Big[2\int_0^a J_2\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_1\Big(\upsilon_{1p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{2q}\upsilon_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_1'\Big(\upsilon_{1p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] - \\
& -\frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2}\sum_p \beta_{3p}M_{3p}\Big[6\int_0^a J_2\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{2q}\upsilon_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] + \\
& +\frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2}\sum_p \alpha_{1p}N_{1p}\Big[2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_1'\Big(u_{1p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_1\Big(u_{1p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] + \\
& +\frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2}\sum_p \alpha_{3p}N_{3p}\Big[2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3'\Big(u_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + 3\frac{\upsilon_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3\Big(u_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{3p}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{3p}^2}{\omega\gamma}b_{3p} = & -\frac{j\omega\varepsilon n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2}\sum_q b_{2q}M_{2q}\Big[6\int_0^a J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{3p}\upsilon_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2'\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] + \\
& +\frac{jnM_{3p}}{2\omega\gamma R}\sum_q b_{2q}M_{2q}\ell_{2q}^2\int_0^a \rho^2 J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho - \\
& -\frac{j\omega\varepsilon n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2}\sum_q b_{4q}M_{4q}\Big[12\int_0^a J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{3p}\upsilon_{4q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_4'\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] + \\
& +\frac{jnM_{3p}}{2\omega\gamma R}\sum_q b_{4q}M_{4q}\ell_{4q}^2\int_0^a \rho^2 J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho - \\
& -\frac{j\omega\varepsilon n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2}\sum_q a_{2q}N_{2q}\Big[3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2'\Big(u_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + 2\frac{\upsilon_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2\Big(u_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_{3p}}{\partial s} - j\omega\gamma\beta_{3p} = & -\frac{j\omega\gamma n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2}\sum_q \beta_{2q}M_{2q}\Big[6\int_0^a J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{3p}\upsilon_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2'\Big(\upsilon_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] - \\
& -\frac{j\omega\gamma n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2}\sum_q \beta_{4q}M_{4q}\Big[12\int_0^a J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{3p}\upsilon_{4q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_4'\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] + \\
& +\frac{j\omega\gamma n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2}\sum_q \alpha_{2q}N_{2q}\Big[3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2'\Big(u_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + 2\frac{\upsilon_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)J_2\Big(u_{2q}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{4q}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{4q}^2}{\omega\gamma}b_{4q} = & -\frac{j\omega\varepsilon n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2}\sum_p b_{3p}M_{3p}\Big[12\int_0^a J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{4q}\upsilon_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_4'\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] + \\
& +\frac{jnM_{4q}}{2\omega\gamma R}\sum_p b_{3p}M_{3p}\ell_{3p}^2\int_0^a \rho^2 J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho - \\
& -\frac{j\omega\varepsilon n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2}\sum_p a_{3p}N_{3p}\Big[4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3'\Big(u_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + 3\frac{\upsilon_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_4'\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3\Big(u_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_{4q}}{\partial s} - j\omega\gamma\beta_{4q} = & -\frac{j\omega\gamma n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2}\sum_p \beta_{3p}M_{3p}\Big[12\int_0^a J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + \frac{\upsilon_{4q}\upsilon_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_4'\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3'\Big(\upsilon_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big] + \\
& +\frac{j\omega\gamma n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2}\sum_p \alpha_{3p}N_{3p}\Big[4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_4\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3'\Big(u_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho + 3\frac{\upsilon_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_4'\Big(\upsilon_{4q}\frac{\rho}{a}\Big)J_3\Big(u_{3p}\frac{\rho}{a}\Big)d\rho\Big]
\end{aligned}
$$

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$\frac{\partial a_{1p}}{\partial s} + j\frac{k^2-k_{1p}^2}{\omega\varepsilon}\alpha_{1p} = \frac{j\omega\gamma n N_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q \alpha_{2q}N_{2q}\left[2\int_0^a J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{1p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{jnN_{1p}}{2\omega\varepsilon R}\sum_q \alpha_{2q}k_{2q}^2 N_{2q}\int_0^a \rho^2 J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho +$$

$$+\frac{j\omega\gamma n N_{1p}}{Rk_{1p}^2}\sum_q \alpha_{0q}N_{0q}\frac{u_{1p}u_{0q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho -$$

$$-\frac{jnN_{1p}}{\omega\varepsilon R}\sum_q \alpha_{0q}k_{0q}^2 N_{0q}\int_0^a \rho^2 J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_0\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho +$$

$$+\frac{j\omega\gamma n N_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q \beta_{2q}M_{2q}\left[\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial \alpha_{1p}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{1p} = \frac{j\omega\varepsilon n N_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q a_{2q}N_{2q}\left[2\int_0^a J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{1p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+\frac{j\omega\varepsilon n N_{1p}}{Rk_{1p}^2}\sum_q a_{0q}N_{0q}\frac{u_{1p}u_{0q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho -$$

$$-\frac{j\omega\varepsilon n N_{1p}}{2Rk_{1p}^2}\sum_q b_{2q}M_{2q}\left[\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial a_{0q}}{\partial s} + j\frac{k^2-k_{0q}^2}{\omega\varepsilon}\alpha_{0q} = \frac{j\omega\gamma n N_{0q}}{Rk_{0q}^2}\sum_p \alpha_{1p}N_{1p}\frac{u_{0q}u_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho -$$

$$-\frac{jnN_{0q}}{\omega\varepsilon R}\sum_p \alpha_{1p}k_{1p}^2 N_{1p}\int_0^a \rho^2 J_0\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho +$$

$$+\frac{j\omega\gamma n N_{0q}}{Rk_{0q}^2}\sum_p \beta_{1p}M_{1p}\frac{u_{0q}}{a}\int_0^a \rho J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho$$

$$\frac{\partial \alpha_{0q}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{0q} = \frac{j\omega\varepsilon n N_{0q}}{Rk_{0q}^2}\sum_p a_{1p}N_{1p}\frac{u_{0q}u_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho -$$

$$-\frac{j\omega\varepsilon n N_{0q}}{Rk_{0q}^2}\sum_p b_{1p}M_{1p}\frac{u_{0q}}{a}\int_0^a \rho J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho$$

$$\frac{\partial a_{2q}}{\partial s} + j\frac{k^2-k_{2q}^2}{\omega\varepsilon}\alpha_{2q} = \frac{j\omega\gamma n N_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \alpha_{1p}N_{1p}\left[2\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}u_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{jnN_{2q}}{2\omega\varepsilon R}\sum_p \alpha_{1p}N_{1p}k_{1p}^2\int_0^a \rho^2 J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho +$$

$$+\frac{j\omega\gamma n N_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \alpha_{3p}N_{3p}\left[6\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) + \frac{u_{2q}u_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{jn\bar{N}_{2q}}{2\omega\varepsilon R}\sum_p \alpha_{3p}\bar{N}_{3p}k_{3p}^2\int_0^a \rho^2 J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho \;+$$

$$+\frac{j\omega\gamma n\bar{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \beta_{1p}M_{1p}\left[2\frac{v_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+\frac{j\omega\gamma n\bar{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p \beta_{3p}M_{3p}\left[2\frac{v_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial \alpha_{2q}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{2q} = \frac{j\omega\varepsilon n\bar{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p a_{1p}\bar{N}_{1p}\left[2\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}u_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+\frac{j\omega\varepsilon n\bar{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p a_{3p}\bar{N}_{3p}\left[6\int_0^a J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}u_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{j\omega\varepsilon n\bar{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p b_{1p}M_{1p}\left[2\frac{v_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{j\omega\varepsilon n\bar{N}_{2q}}{2Rk_{2q}^2}\sum_p b_{3p}M_{3p}\left[2\frac{v_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial a_{3p}}{\partial s} + j\frac{k^2-k_{3p}^2}{\omega\varepsilon}\alpha_{3p} = \frac{j\omega\gamma n\bar{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q \alpha_{2q}\bar{N}_{2q}\left[6\int_0^a J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{3p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{jn\bar{N}_{3p}}{2\omega\varepsilon R}\sum_q \alpha_{2q}\bar{N}_{2q}k_{2q}^2\int_0^a \rho^2 J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho \;+$$

$$+\frac{j\omega\gamma n\bar{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q \beta_{2q}M_{2q}\left[3\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] +$$

$$+\frac{j\omega\gamma n\bar{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q \beta_{4q}M_{4q}\left[3\frac{v_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$\frac{\partial \alpha_{3p}}{\partial s} + j\omega\varepsilon a_{3p} = \frac{j\omega\varepsilon n\bar{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q a_{2q}\bar{N}_{2q}\left[6\int_0^a J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + \frac{u_{3p}u_{2q}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{j\omega\varepsilon n\bar{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q b_{2q}M_{2q}\left[3\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] -$$

$$-\frac{j\omega\varepsilon n\bar{N}_{3p}}{2Rk_{3p}^2}\sum_q b_{4q}M_{4q}\left[3\frac{v_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho + 4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right)J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right]$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_{1p}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{1p}^2}{\omega\mu} b_{1p} = &- \frac{j\omega\varepsilon n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q b_{2q} M_{2q} \left[2\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}v_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+ \frac{jnM_{1p}}{2\omega\gamma R} \sum_q b_{2q} M_{2q}\ell_{2q}^2 \int_0^a \rho^2 J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \\
&+ \frac{j\omega\varepsilon n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q a_{2q} N_{2q} \left[\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{v_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+ \frac{j\omega\varepsilon n M_{1p}}{R\ell_{1p}^2} \sum_q a_{0q} N_{0q} \frac{u_{0q}}{a}\int_0^a \rho J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_{1p}}{\partial s} - j\omega\gamma B_{1p} = &- \frac{j\omega\gamma n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q \beta_{2q} M_{2q} \left[2\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}v_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
&- \frac{j\omega\gamma n M_{1p}}{2R\ell_{1p}^2} \sum_q \alpha_{2q} N_{2q} \left[\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{v_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
&- \frac{j\omega\gamma n M_{1p}}{R\ell_{1p}^2} \sum_q \alpha_{0q} N_{0q} \frac{u_{0q}}{a}\int_0^a \rho J_0'\left(u_{0q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_{2q}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{2q}^2}{\omega\gamma} b_{2q} = &- \frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p b_{1p} M_{1p} \left[2\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}v_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+ \frac{jnM_{2q}}{2\omega\gamma R} \sum_p b_{1p} M_{1p}\ell_{1p}^2 \int_0^a \rho^2 J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho - \\
&- \frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p b_{3p} M_{3p} \left[6\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+ \frac{jnM_{2q}}{2\omega\gamma R} \sum_p b_{3p} M_{3p}\ell_{3p}^2 \int_0^a \rho^2 J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \\
&+ \frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p a_{1p} N_{1p} \left[2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
&+ \frac{j\omega\varepsilon n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p a_{3p} N_{3p} \left[2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 3\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_{2q}}{\partial s} - j\omega\gamma B_{2q} = &- \frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p \beta_{1p} M_{1p} \left[2\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}v_{1p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(v_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
&- \frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p \beta_{3p} M_{3p} \left[6\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
&- \frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p \alpha_{1p} N_{1p} \left[2\frac{u_{1p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{1p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
&- \frac{j\omega\gamma n M_{2q}}{2R\ell_{2q}^2} \sum_p \alpha_{3p} N_{3p} \left[2\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 3\frac{v_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_{3p}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{3p}^2}{\omega\gamma} b_{3p} = & -\frac{j\omega\varepsilon n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2} \sum_q b_{2q} M_{2q} \left[6\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q} v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
& + \frac{jnM_{3p}}{2\omega\gamma R} \sum_q b_{2q} M_{2q} \ell_{2q}^2 \int_0^a \rho^2 J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho - \\
& - \frac{j\omega\varepsilon n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2} \sum_q b_{4q} M_{4q} \left[12\int_0^a J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{4q} v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
& + \frac{jnM_{3p}}{2\omega\gamma R} \sum_q b_{4q} M_{4q} \ell_{4q}^2 \int_0^a \rho^2 J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \\
& + \frac{j\omega\varepsilon n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2} \sum_q a_{2q} N_{2q} \left[3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{v_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] \\
\frac{\partial b_{3p}}{\partial s} - j\omega\gamma \beta_{3p} = & -\frac{j\omega\gamma n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2} \sum_q \beta_{2q} M_{2q} \left[6\int_0^a J_2\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{2q} v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_2'\left(v_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
& - \frac{j\omega\gamma n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2} \sum_q \beta_{4q} M_{4q} \left[12\int_0^a J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{4q} v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
& - \frac{j\omega\gamma n M_{3p}}{2R\ell_{3p}^2} \sum_q \alpha_{2q} N_{2q} \left[3\frac{u_{2q}}{a}\int_0^a \rho J_2'\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 2\frac{v_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] \\
\frac{\partial \beta_{4q}}{\partial s} - j\frac{k^2-\ell_{4q}^2}{\omega\gamma} b_{4q} = & -\frac{j\omega\varepsilon n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2} \sum_p b_{3p} M_{3p} \left[12\int_0^a J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{4q} v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] + \\
& + \frac{jnM_{4q}}{2\omega\gamma R} \sum_p b_{3p} M_{3p} \ell_{3p}^2 \int_0^a \rho^2 J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \\
& + \frac{j\omega\varepsilon n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2} \sum_p a_{3p} N_{3p} \left[4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 3\frac{v_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] \\
\frac{\partial b_{4q}}{\partial s} - j\omega\gamma \beta_{4q} = & -\frac{j\omega\gamma n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2} \sum_p \beta_{3p} M_{3p} \left[12\int_0^a J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + \frac{v_{4q} v_{3p}}{a^2}\int_0^a \rho^2 J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(v_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right] - \\
& - \frac{j\omega\gamma n M_{4q}}{2R\ell_{4q}^2} \sum_p \alpha_{3p} N_{3p} \left[4\frac{u_{3p}}{a}\int_0^a \rho J_4\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3'\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho + 3\frac{v_{4q}}{a}\int_0^a \rho J_4'\left(v_{4q}\frac{\rho}{a}\right) J_3\left(u_{3p}\frac{\rho}{a}\right) d\rho \right]
\end{aligned}
$$

(2)

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$a\frac{\partial a_{1p}}{\partial s} + jZ_0\frac{v_{1p}^2}{ka}\alpha_{1p} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \alpha_{2q}\frac{u_{2q}[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{1p}^2)-2u_{1p}^2u_{2q}^2]}{ka\,u_{1p}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} - jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{1p}(v_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}}$$

$$a\frac{\partial \alpha_{1p}}{\partial s} + \frac{j}{Z_0}(ka)a_{1p} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2+u_{1p}^2)}{u_{1p}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{1p}(v_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}}$$

$$a\frac{\partial a_{2q}}{\partial s} + jZ_0\frac{v_{2q}^2}{ka}\alpha_{2q} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{1p}\frac{u_{1p}[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{1p}^2)-2u_{1p}^2u_{2q}^2]}{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} + jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{3p}\frac{u_{3p}[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{3p}^2)-2u_{3p}^2u_{2q}^2]}{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} +$$

$$+jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{1p}\frac{ka\,v_{1p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{1p}^2)\sqrt{v_{1p}^2-1}} + jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{3p}\frac{3ka\,v_{3p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{3p}^2)\sqrt{v_{3p}^2-9}}$$

$$a\frac{\partial \alpha_{2q}}{\partial s} + \frac{j}{Z_0}(ka)a_{2q} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{1p}\frac{ka\,u_{1p}(u_{2q}^2+u_{1p}^2)}{u_{2q}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{3p}\frac{ka\,u_{3p}(u_{2q}^2+u_{3p}^2)}{u_{2q}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} -$$

$$-\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{1p}\frac{ka\,v_{1p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{1p}^2)\sqrt{v_{1p}^2-1}} - \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{3p}\frac{3ka\,v_{3p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{3p}^2)\sqrt{v_{3p}^2-9}}$$

$$a\frac{\partial a_{3p}}{\partial s} + jZ_0\frac{v_{3p}^2}{ka}\alpha_{3p} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \alpha_{2q}\frac{u_{2q}[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{3p}^2)-2u_{2q}^2u_{3p}^2]}{ka\,u_{3p}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} - jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{3p}(v_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}} -$$

$$-jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{4q}\frac{4ka\,v_{4q}}{u_{3p}(v_{4q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

$$a\frac{\partial \alpha_{3p}}{\partial s} + \frac{j}{Z_0}(ka)a_{3p} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2+u_{3p}^2)}{u_{3p}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{3p}(v_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}} +$$

$$+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{4q}\frac{4ka\,v_{4q}}{u_{3p}(v_{4q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

$$a\frac{\partial \beta_{1p}}{\partial s} - \frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{1p}^2}{ka} b_{1p} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{\upsilon_{2q}\left[2k^2a^2(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)-\upsilon_{1p}^2\upsilon_{2q}^2(4-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{1p}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{0q}\frac{\sqrt{2}\,\upsilon_{1p}\upsilon_{0q}^2(\upsilon_{0q}^2+\upsilon_{1p}^2-2k^2a^2)}{ka(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}} +$$

$$+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{ka\,u_{2q}}{\upsilon_{1p}(u_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}$$

$$a\frac{\partial b_{1p}}{\partial s} - jZ_0(ka)\beta_{1p} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{2q}\frac{2ka\,\upsilon_{2q}(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)}{\upsilon_{1p}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}} - jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{0q}\frac{2\sqrt{2}\,ka\,\upsilon_{1p}\upsilon_{0q}^2}{(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}} -$$

$$-jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \alpha_{2q}\frac{ka\,u_{2q}}{\upsilon_{1p}(u_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}$$

$$a\frac{\partial \beta_{0q}}{\partial s} - \frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{0q}^2}{ka} b_{0q} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{1p}\frac{\sqrt{2}\,\upsilon_{1p}^3(\upsilon_{0q}^2+\upsilon_{1p}^2-2k^2a^2)}{ka(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}$$

$$a\frac{\partial b_{0q}}{\partial s} - jZ_0(ka)\beta_{0q} = -jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{1p}\frac{2\sqrt{2}\,ka\,\upsilon_{1p}^3}{(\upsilon_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}$$

$$a\frac{\partial \beta_{2q}}{\partial s} - \frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{2q}^2}{ka} b_{2q} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{1p}\frac{\upsilon_{1p}\left[2k^2a^2(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)-\upsilon_{1p}^2\upsilon_{2q}^2(4-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}} - \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{1p}\frac{2ka\,u_{1p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}} +$$

$$+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{3p}\frac{\upsilon_{3p}\left[2k^2a^2(3\upsilon_{3p}^2+3\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2)-\upsilon_{3p}^2\upsilon_{2q}^2(12-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{2q}^2-4)(\upsilon_{3p}^2-9)}} - \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{3p}\frac{2ka\,u_{3p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}}$$

$$a\frac{\partial b_{2q}}{\partial s} - jZ_0(ka)\beta_{2q} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{1p}\frac{2ka\,\upsilon_{1p}(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}} + jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{1p}\frac{2ka\,u_{1p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}} +$$

$$+jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{3p}\frac{2ka\,\upsilon_{3p}(3\upsilon_{3p}^2+3\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2)}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{2q}^2-4)(\upsilon_{3p}^2-9)}} + jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{3p}\frac{2ka\,u_{3p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}}$$

$$a\frac{\partial \beta_{3p}}{\partial s}-\frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{3p}^2}{ka}b_{3p}=\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{v_{2q}\left[2k^2a^2\left(3v_{3p}^2+3v_{2q}^2-v_{2q}^2v_{3p}^2\right)-v_{2q}^2v_{3p}^2\left(12-v_{2q}^2-v_{3p}^2\right)\right]}{ka\,v_{3p}\left(v_{2q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{2q}^2-4\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}}+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{3ka\,u_{2q}}{v_{3p}\left(u_{2q}^2-v_{3p}^2\right)\sqrt{v_{3p}^2-9}}+$$

$$+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{4q}\frac{v_{4q}\left[2k^2a^2\left(6v_{3p}^2+6v_{4q}^2-v_{4q}^2v_{3p}^2\right)-v_{4q}^2v_{3p}^2\left(24-v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)\right]}{ka\,v_{3p}\left(v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{4q}^2-16\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}}$$

$$a\frac{\partial b_{3p}}{\partial s}-jZ_0(ka)\beta_{3p}=jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}\left(3v_{3p}^2+3v_{2q}^2-v_{2q}^2v_{3p}^2\right)}{v_{3p}\left(v_{2q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{2q}^2-4\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}}-jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \alpha_{2q}\frac{3ka\,u_{2q}}{v_{3p}\left(u_{2q}^2-v_{3p}^2\right)\sqrt{v_{3p}^2-9}}+$$

$$+jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{4q}\frac{2ka\,v_{4q}\left(6v_{3p}^2+6v_{4q}^2-v_{4q}^2v_{3p}^2\right)}{v_{3p}\left(v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{4q}^2-16\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}}$$

$$a\frac{\partial \beta_{4q}}{\partial s}-\frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{4q}^2}{ka}b_{4q}=\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{3p}\frac{v_{3p}\left[2k^2a^2\left(6v_{3p}^2+6v_{4q}^2-v_{4q}^2v_{3p}^2\right)-v_{4q}^2v_{3p}^2\left(24-v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)\right]}{ka\,v_{4q}\left(v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{4q}^2-16\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}}-\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{3p}\frac{4ka\,u_{3p}}{v_{4q}\left(v_{4q}^2-u_{3p}^2\right)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

$$a\frac{\partial b_{4q}}{\partial s}-jZ_0(ka)\beta_{4q}=jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{3p}\frac{2ka\,v_{3p}\left(6v_{3p}^2+6v_{4q}^2-v_{4q}^2v_{3p}^2\right)}{v_{4q}\left(v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{4q}^2-16\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}}+jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{3p}\frac{4ka\,u_{3p}}{v_{4q}\left(v_{4q}^2-u_{3p}^2\right)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

(3)

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$a\frac{\partial a_{1p}}{\partial s} + jZ_0\frac{v_{1p}^2}{ka}\alpha_{1p} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \alpha_{2q}\frac{u_{2q}\left[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{1p}^2)-2u_{1p}^2u_{2q}^2\right]}{ka\,u_{1p}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} + jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \alpha_{0q}\frac{\sqrt{2}\,u_{0q}\left[k^2a^2(u_{0q}^2+u_{1p}^2)-2u_{1p}^2u_{0q}^2\right]}{ka\,u_{1p}(u_{0q}^2-u_{1p}^2)^2} +$$

$$+ jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{1p}(v_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}}$$

$$a\frac{\partial \alpha_{1p}}{\partial s} + \frac{j}{Z_0}(ka)\,a_{1p} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2+u_{1p}^2)}{u_{1p}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{0q}\frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{0q}(u_{0q}^2+u_{1p}^2)}{u_{1p}(u_{0q}^2-u_{1p}^2)^2} -$$

$$-\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{1p}(v_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}}$$

$$a\frac{\partial a_{0q}}{\partial s} + jZ_0\frac{v_{0q}^2}{ka}\alpha_{0q} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{1p}\frac{\sqrt{2}\,u_{1p}\left[k^2a^2(u_{0q}^2+u_{1p}^2)-2u_{1p}^2u_{0q}^2\right]}{ka\,u_{0q}(u_{0q}^2-u_{1p}^2)^2} - jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{1p}\frac{\sqrt{2}\,ka\,v_{1p}}{u_{0q}(u_{0q}^2-v_{1p}^2)\sqrt{v_{1p}^2-1}}$$

$$a\frac{\partial \alpha_{0q}}{\partial s} + \frac{j}{Z_0}(ka)\,a_{0q} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{1p}\frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{1p}(u_{0q}^2+u_{1p}^2)}{u_{0q}(u_{0q}^2-u_{1p}^2)^2} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{1p}\frac{\sqrt{2}\,ka\,v_{1p}}{u_{0q}(u_{0q}^2-v_{1p}^2)\sqrt{v_{1p}^2-1}}$$

$$a\frac{\partial a_{2q}}{\partial s} + jZ_0\frac{v_{2q}^2}{ka}\alpha_{2q} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{1p}\frac{u_{1p}\left[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{1p}^2)-2u_{1p}^2u_{2q}^2\right]}{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} + jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{3p}\frac{u_{3p}\left[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{3p}^2)-2u_{3p}^2u_{2q}^2\right]}{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} -$$

$$-jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{1p}\frac{ka\,v_{1p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{1p}^2)\sqrt{v_{1p}^2-1}} - jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{3p}\frac{3ka\,v_{3p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{3p}^2)\sqrt{v_{3p}^2-9}}$$

$$a\frac{\partial \alpha_{2q}}{\partial s} + \frac{j}{Z_0}(ka)\,a_{2q} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{1p}\frac{ka\,u_{1p}(u_{2q}^2+u_{1p}^2)}{u_{2q}(u_{2q}^2-u_{1p}^2)^2} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{3p}\frac{ka\,u_{3p}(u_{2q}^2+u_{3p}^2)}{u_{2q}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} +$$

$$+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{1p}\frac{ka\,v_{1p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{1p}^2)\sqrt{v_{1p}^2-1}} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{3p}\frac{3ka\,v_{3p}}{u_{2q}(u_{2q}^2-v_{3p}^2)\sqrt{v_{3p}^2-9}}$$

$$a\frac{\partial a_{3p}}{\partial s} + jZ_0\frac{v_{3p}^2}{ka}\alpha_{3p} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \alpha_{2q}\frac{u_{2q}\left[k^2a^2(u_{2q}^2+u_{3p}^2)-2u_{3p}^2u_{2q}^2\right]}{ka\,u_{3p}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} + jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{3p}(v_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}} +$$

$$+ jZ_0\frac{a}{R}\sum_q \beta_{4q}\frac{4ka\,v_{4q}}{u_{3p}(v_{4q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

$$a\frac{\partial \alpha_{3p}}{\partial s} + \frac{j}{Z_0}(ka)a_{3p} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{ka\,u_{2q}(u_{2q}^2+u_{3p}^2)}{u_{3p}(u_{2q}^2-u_{3p}^2)^2} - \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{2ka\,v_{2q}}{u_{3p}(v_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{2q}^2-4}} -$$

$$-\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{4q}\frac{4ka\,v_{4q}}{u_{3p}(v_{4q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

$$a\frac{\partial \beta_{1p}}{\partial s}-\frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{1p}^2}{ka}b_{1p}=\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{\upsilon_{2q}\left[2k^2a^2(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2(4-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{1p}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}}-\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{ka\,u_{2q}}{\upsilon_{1p}(u_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}-$$

$$-\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{0q}\frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{0q}}{\upsilon_{1p}(u_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}\,.$$

$$a\frac{\partial b_{1p}}{\partial s}-jZ_0(ka)\beta_{1p}=jZ_0\frac{a}{R}\sum_q\beta_{2q}\frac{2ka\,\upsilon_{2q}(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)}{\upsilon_{1p}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}}+jZ_0\frac{a}{R}\sum_q\alpha_{2q}\frac{ka\,u_{2q}}{\upsilon_{1p}(u_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}+$$

$$+jZ_0\frac{a}{R}\sum_q\alpha_{0q}\frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{0q}}{\upsilon_{1p}(u_{0q}^2-\upsilon_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{1p}^2-1}}\,.$$

$$a\frac{\partial \beta_{2q}}{\partial s}-\frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{2q}^2}{ka}b_{2q}=\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{1p}\frac{\upsilon_{1p}\left[2k^2a^2(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2(4-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}}+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{1p}\frac{2ka\,u_{1p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}}+$$

$$+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{3p}\frac{\upsilon_{3p}\left[2k^2a^2(3\upsilon_{3p}^2+3\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2)-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2(12-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{2q}^2-4)(\upsilon_{3p}^2-9)}}+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{3p}\frac{2ka\,u_{3p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}}\,.$$

$$a\frac{\partial b_{2q}}{\partial s}-jZ_0(ka)\beta_{2q}=jZ_0\frac{a}{R}\sum_p\beta_{1p}\frac{2ka\,\upsilon_{1p}(\upsilon_{1p}^2+\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{1p}^2)}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{1p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{1p}^2-1)(\upsilon_{2q}^2-4)}}-jZ_0\frac{a}{R}\sum_p\alpha_{1p}\frac{2ka\,u_{1p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{1p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}}+$$

$$+jZ_0\frac{a}{R}\sum_p\beta_{3p}\frac{2ka\,\upsilon_{3p}(3\upsilon_{3p}^2+3\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2)}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{2q}^2-4)(\upsilon_{3p}^2-9)}}-jZ_0\frac{a}{R}\sum_p\alpha_{3p}\frac{2ka\,u_{3p}}{\upsilon_{2q}(\upsilon_{2q}^2-u_{3p}^2)\sqrt{\upsilon_{2q}^2-4}}\,.$$

$$a\frac{\partial \beta_{3p}}{\partial s}-\frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{3p}^2}{ka}b_{3p}=\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{2q}\frac{\upsilon_{2q}\left[2k^2a^2(3\upsilon_{3p}^2+3\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2)-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2(12-\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{3p}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{2q}^2-4)(\upsilon_{3p}^2-9)}}-\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q a_{2q}\frac{3ka\,u_{2q}}{\upsilon_{3p}(u_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)\sqrt{\upsilon_{3p}^2-9}}+$$

$$+\frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_q b_{4q}\frac{\upsilon_{4q}\left[2k^2a^2(6\upsilon_{3p}^2+6\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{4q}^2\upsilon_{3p}^2)-\upsilon_{4q}^2\upsilon_{3p}^2(24-\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)\right]}{ka\,\upsilon_{3p}(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{4q}^2-16)(\upsilon_{3p}^2-9)}}\,.$$

$$a\frac{\partial b_{3p}}{\partial s}-jZ_0(ka)\beta_{3p}=jZ_0\frac{a}{R}\sum_q\beta_{2q}\frac{2ka\,\upsilon_{2q}(3\upsilon_{3p}^2+3\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{2q}^2\upsilon_{3p}^2)}{\upsilon_{3p}(\upsilon_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{2q}^2-4)(\upsilon_{3p}^2-9)}}+jZ_0\frac{a}{R}\sum_q\alpha_{2q}\frac{3ka\,u_{2q}}{\upsilon_{3p}(u_{2q}^2-\upsilon_{3p}^2)\sqrt{\upsilon_{3p}^2-9}}+$$

$$+jZ_0\frac{a}{R}\sum_q\beta_{4q}\frac{2ka\,\upsilon_{4q}(6\upsilon_{3p}^2+6\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{4q}^2\upsilon_{3p}^2)}{\upsilon_{3p}(\upsilon_{4q}^2-\upsilon_{3p}^2)^2\sqrt{(\upsilon_{4q}^2-16)(\upsilon_{3p}^2-9)}}\,.$$

$$a\frac{\partial \beta_{4q}}{\partial s} - \frac{j}{Z_0}\frac{\gamma_{4q}^2}{ka} b_{4q} = \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p b_{3p}\frac{v_{3p}\left[2k^2a^2\left(6v_{3p}^2+6v_{4q}^2-v_{4q}^2v_{3p}^2\right)-v_{4q}^2v_{3p}^2\left(24-v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)\right]}{ka\,v_{4q}\left(v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{4q}^2-16\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}} + \frac{j}{Z_0}\frac{a}{R}\sum_p a_{3p}\frac{4ka\,u_{3p}}{v_{4q}\left(v_{4q}^2-u_{3p}^2\right)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

$$a\frac{\partial b_{4q}}{\partial s} - jZ_0(ka)\beta_{4q} = jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \beta_{3p}\frac{2ka\,v_{3p}\left(6v_{3p}^2+6v_{4q}^2-v_{4q}^2v_{3p}^2\right)}{v_{4q}\left(v_{4q}^2-v_{3p}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{4q}^2-16\right)\left(v_{3p}^2-9\right)}} - jZ_0\frac{a}{R}\sum_p \alpha_{3p}\frac{4ka\,u_{3p}}{v_{4q}\left(v_{4q}^2-u_{3p}^2\right)\sqrt{v_{4q}^2-16}}$$

(4)

ANNEXE E

SOLUTIONS DES ÉQUATIONS D'ORDRE (1)

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

TM_{2q}

$$a^{(1)}_{2q}(s^*) = \frac{F_q b_0}{2(\nu_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\Big[(\nu_{2q}+\gamma_{\parallel})^2 e^{-j\nu_{2q}s^*/a} + (\nu_{2q}-\gamma_{\parallel})^2 e^{-j\gamma_{\parallel}s_1^*/a}\, e^{j\nu_{2q}(s^*-s_1^*)/a} - 2(\nu_{2q}^2+\gamma_{\parallel}^2)e^{-j\gamma_{\parallel}s^*/a}\Big]$$

$$\alpha^{(1)}_{2q}(s^*) = \frac{F_q k a b_0}{2Z_0\nu_{2q}(\nu_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\Big[(\nu_{2q}+\gamma_{\parallel})^2 e^{-j\nu_{2q}s^*/a} - (\nu_{2q}-\gamma_{\parallel})^2 e^{-j\gamma_{\parallel}s_1^*/a}\, e^{j\nu_{2q}(s^*-s_1^*)/a} - 4\gamma_{\parallel}\nu_{2q}\, e^{-j\gamma_{\parallel}s^*/a}\Big]$$

TE_{2q}

$$b^{(1)}_{2q}(s^*) = \frac{b_0}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\Big[(\gamma_{2q}+\gamma_{\parallel})(f_q+\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_{2q}s^*/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_{\parallel})(f_q-\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s_1^*/a}\, e^{j\gamma_{2q}(s^*-s_1^*)/a} - 2\gamma_{2q}(f_q+\gamma_{\parallel}^2 g_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s^*/a}\Big]$$

$$\beta^{(1)}_{2q}(s^*) = \frac{b_0}{2Z_0 ka(\gamma_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\Big[-(\gamma_{2q}+\gamma_{\parallel})(f_q+\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_{2q}s^*/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_{\parallel})(f_q-\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s_1^*/a}\, e^{j\gamma_{2q}(s^*-s_1^*)/a} + 2\gamma_{\parallel}(f_q+\gamma_{2q}^2 g_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s^*/a}\Big]$$

TE_{0q}

$$b^{(1)}_{0q}(s^*) = \frac{b_0}{2\gamma_{0q}(\gamma_{0q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\Big[(\gamma_{0q}+\gamma_{\parallel})(e_q-\gamma_{\parallel}\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_{0q}s^*/a} + (\gamma_{0q}-\gamma_{\parallel})(e_q+\gamma_{\parallel}\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s_1^*/a}\, e^{j\gamma_{0q}(s^*-s_1^*)/a} - 2\gamma_{0q}(e_q-\gamma_{\parallel}^2 h_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s^*/a}\Big]$$

$$\beta^{(1)}_{0q}(s^*) = \frac{b_0}{2Z_0 ka(\gamma_{0q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\Big[-(\gamma_{0q}+\gamma_{\parallel})(e_q-\gamma_{\parallel}\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_{0q}s^*/a} + (\gamma_{0q}-\gamma_{\parallel})(e_q+\gamma_{\parallel}\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s_1^*/a}\, e^{j\gamma_{0q}(s^*-s_1^*)/a} + 2\gamma_{\parallel}(e_q-\gamma_{0q}^2 h_q)e^{-j\gamma_{\parallel}s^*/a}\Big]$$

(1)

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$a_{2q}^{(i)}(s^*) = -\frac{F_q b_0}{2(\nu_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{2q}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{2q}s^*/a} + (\nu_{2q}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_i^*/a} e^{j\nu_{2q}(s^*-s_i^*)/a} - 2(\nu_{2q}^2+\gamma_{11}^2) e^{-j\gamma_{11}s^*/a}\right]$$

$$\alpha_{2q}^{(i)}(s^*) = -\frac{F_q k a b_0}{2Z_0\nu_{2q}(\nu_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{2q}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{2q}s^*/a} - (\nu_{2q}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_i^*/a} e^{j\nu_{2q}(s^*-s_i^*)/a} - 4\gamma_{11}\nu_{2q}\, e^{-j\gamma_{11}s^*/a}\right]$$

TM_{2q}

$$a_{0q}^{(i)}(s^*) = -\frac{d_q b_0}{2(\nu_{0q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{0q}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{0q}s^*/a} + (\nu_{0q}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_i^*/a} e^{j\nu_{0q}(s^*-s_i^*)/a} - 2(\nu_{0q}^2+\gamma_{11}^2) e^{-j\gamma_{11}s^*/a}\right]$$

$$\alpha_{0q}^{(i)}(s^*) = -\frac{d_q k a b_0}{2Z_0\nu_{0q}^2(\nu_{0q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{0q}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{0q}s^*/a} - (\nu_{0q}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_i^*/a} e^{j\nu_{0q}(s^*-s_i^*)/a} - 4\gamma_{11}\nu_{0q}\, e^{-j\gamma_{11}s^*/a}\right]$$

TM_{0q}

$$b_{2q}^{(i)}(s^*) = \frac{b_0}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\gamma_{2q}+\gamma_{11})(f_q+\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{2q}s^*/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_{11})(f_q-\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{11}s_i^*/a} e^{j\gamma_{2q}(s^*-s_i^*)/a} - 2\gamma_{2q}(f_q+\gamma_{11}^2 g_q) e^{-j\gamma_{11}s^*/a}\right]$$

$$\beta_{2q}^{(i)}(s^*) = \frac{b_0}{2Z_0 k a(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[-(\gamma_{2q}+\gamma_{11})(f_q+\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{2q}s^*/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_{11})(f_q-\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{11}s_i^*/a} e^{j\gamma_{2q}(s^*-s_i^*)/a} + 2\gamma_{11}(f_q+\gamma_{2q}^2 g_q) e^{-j\gamma_{11}s^*/a}\right]$$

TE_{2q}

(2)

EXPRESSIONS D'AMPLITUDE DES ONDES RÉFLÉCHIES ET TRANSMISES D'ORDRE (1)

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$a_{2q}^{(1)}(0) = \frac{F_q b_o}{2(\nu_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\nu_{2q} - \gamma_n)^2 \left(e^{-i(\gamma_n + \nu_{2q})S_i^+/a} - 1\right)$$

$$a_{2q}^{(1)}(S_i^+) = \frac{F_q b_o}{2(\nu_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\nu_{2q} + \gamma_n)^2 \left(e^{i(\gamma_n - \nu_{2q})S_i^+/a} - 1\right) e^{-i\gamma_n S_i^+/a}$$

TM$_{2q}$

$$\alpha_{2q}^{(1)}(0) = -\frac{F_q k a b_o}{2Z_o \nu_{2q}(\nu_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\nu_{2q} - \gamma_n)^2 \left(e^{-i(\gamma_n + \nu_{2q})S_i^+/a} - 1\right)$$

$$\alpha_{2q}^{(1)}(S_i^+) = \frac{F_q k a b_o}{2Z_o \nu_{2q}(\nu_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\nu_{2q} + \gamma_n)^2 \left(e^{i(\gamma_n - \nu_{2q})S_i^+/a} - 1\right) e^{-i\gamma_n S_i^+/a}$$

$$b_{2q}^{(1)}(0) = \frac{b_o}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{2q} - \gamma_n)(f_q - \gamma_n \gamma_{2q} g_q)\left(e^{-i(\gamma_n + \gamma_{2q})S_i^+/a} - 1\right)$$

$$b_{2q}^{(1)}(S_i^+) = \frac{b_o}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{2q} + \gamma_n)(f_q + \gamma_n \gamma_{2q} g_q)\left(e^{i(\gamma_n - \gamma_{2q})S_i^+/a} - 1\right) e^{-i\gamma_n S_i^+/a}$$

TE$_{2q}$

$$\beta_{2q}^{(1)}(0) = \frac{b_o}{2Z_o ka(\gamma_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{2q} - \gamma_n)(f_q - \gamma_n \gamma_{2q} g_q)\left(e^{-i(\gamma_n + \gamma_{2q})S_i^+/a} - 1\right)$$

$$\beta_{2q}^{(1)}(S_i^+) = -\frac{b_o}{2Z_o ka(\gamma_{2q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{2q} + \gamma_n)(f_q + \gamma_n \gamma_{2q} g_q)\left(e^{i(\gamma_n - \gamma_{2q})S_i^+/a} - 1\right) e^{-i\gamma_n S_i^+/a}$$

$$b_{0q}^{(1)}(0) = \frac{b_o}{2\gamma_{0q}(\gamma_{0q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{0q} - \gamma_n)(e_q + \gamma_n \gamma_{0q} h_q)\left(e^{-i(\gamma_n + \gamma_{0q})S_i^+/a} - 1\right)$$

$$b_{0q}^{(1)}(S_i^+) = \frac{b_o}{2\gamma_{0q}(\gamma_{0q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{0q} + \gamma_n)(e_q - \gamma_n \gamma_{0q} h_q)\left(e^{i(\gamma_n - \gamma_{0q})S_i^+/a} - 1\right) e^{-i\gamma_n S_i^+/a}$$

TE$_{0q}$

$$\beta_{0q}^{(1)}(0) = \frac{b_o}{2Z_o ka(\gamma_{0q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{0q} - \gamma_n)(e_q + \gamma_n \gamma_{0q} h_q)\left(e^{-i(\gamma_n + \gamma_{0q})S_i^+/a} - 1\right)$$

$$\beta_{0q}^{(1)}(S_i^+) = -\frac{b_o}{2Z_o ka(\gamma_{0q}^2 - \gamma_n^2)} (\gamma_{0q} + \gamma_n)(e_q - \gamma_n \gamma_{0q} h_q)\left(e^{i(\gamma_n - \gamma_{0q})S_i^+/a} - 1\right) e^{-i\gamma_n S_i^+/a}$$

(3)

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$a^{(1)}_{2q}(0) = -\frac{F_q b_0}{2(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{2q}-\gamma_n)^2\left(e^{-j(\gamma_n+\nu_{2q})s_1^*/a}-1\right)$$

$$a^{(1)}_{2q}(s_1^*) = -\frac{F_q b_0}{2(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{2q}+\gamma_n)^2\left(e^{j(\gamma_n-\nu_{0q})s_1^*/a}-1\right)e^{-j\gamma_n s_1^*/a}$$

TM_{2q}

$$\alpha^{(1)}_{2q}(0) = \frac{F_q k a b_0}{2Z_0\nu_{2q}(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{2q}-\gamma_n)^2\left(e^{-j(\gamma_n+\nu_{2q})s_1^*/a}-1\right)$$

$$\alpha^{(1)}_{2q}(s_1^*) = -\frac{F_q k a b_0}{2Z_0\nu_{2q}(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{2q}+\gamma_n)^2\left(e^{j(\gamma_n-\nu_{2q})s_1^*/a}-1\right)e^{-j\gamma_n s_1^*/a}$$

$$a^{(1)}_{0q}(0) = -\frac{d_q b_0}{2(\nu_{0q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{0q}-\gamma_n)^2\left(e^{-j(\gamma_n+\nu_{0q})s_1^*/a}-1\right)$$

$$a^{(1)}_{0q}(s_1^*) = -\frac{d_q b_0}{2(\nu_{0q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{0q}+\gamma_n)^2\left(e^{j(\gamma_n-\nu_{0q})s_1^*/a}-1\right)e^{-j\gamma_n s_1^*/a}$$

TM_{0q}

$$\alpha^{(1)}_{0q}(0) = \frac{d_q k a b_0}{2Z_0\nu_{0q}(\nu_{0q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{0q}-\gamma_n)^2\left(e^{-j(\gamma_n+\nu_{0q})s_1^*/a}-1\right)$$

$$\alpha^{(1)}_{0q}(s_1^*) = -\frac{d_q k a b_0}{2Z_0\nu_{0q}(\nu_{0q}^2-\gamma_n^2)}(\nu_{0q}+\gamma_n)^2\left(e^{j(\gamma_n-\nu_{0q})s_1^*/a}-1\right)e^{-j\gamma_n s_1^*/a}$$

$$b^{(1)}_{2q}(0) = \frac{b_0}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\gamma_{2q}-\gamma_n)(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q)\left(e^{-j(\gamma_n+\gamma_{2q})s_1^*/a}-1\right)$$

$$b^{(1)}_{2q}(s_1^*) = \frac{b_0}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\gamma_{2q}+\gamma_n)(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q)\left(e^{j(\gamma_n-\gamma_{2q})s_1^*/a}-1\right)e^{-j\gamma_n s_1^*/a}$$

TE_{2q}

$$\beta^{(1)}_{2q}(0) = \frac{b_0}{2Z_0 ka(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\gamma_{2q}-\gamma_n)(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q)\left(e^{-j(\gamma_n+\gamma_{2q})s_1^*/a}-1\right)$$

$$\beta^{(1)}_{2q}(s_1^*) = -\frac{b_0}{2Z_0 ka(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}(\gamma_{2q}+\gamma_n)(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q)\left(e^{j(\gamma_n-\gamma_{2q})s_1^*/a}-1\right)e^{-j\gamma_n s_1^*/a}$$

(4)

SOLUTIONS DES ÉQUATIONS HOMOGÈNES D'ORDRE (I)

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$a'^{(1)}_{2q}(s^\circ) = \frac{F_q b_\circ}{2(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[(\nu_{2q}+\gamma_n)^2 e^{-j\nu_{2q}s^\circ/a} + (\nu_{2q}-\gamma_n)^2 e^{-j\gamma_n s_1^\circ/a}\, e^{j\nu_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

$$\alpha'^{(1)}_{2q}(s^\circ) = \frac{F_q k a b_\circ}{2Z_\circ \nu_{2q}(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[(\nu_{2q}+\gamma_n)^2 e^{-j\nu_{2q}s^\circ/a} - (\nu_{2q}-\gamma_n)^2 e^{-j\gamma_n s_1^\circ/a}\, e^{j\nu_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

TM$_{2q}$

$$b'^{(1)}_{2q}(s^\circ) = \frac{b_\circ}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[(\gamma_{2q}+\gamma_n)(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_{2q}s^\circ/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_n)(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_n s_1^\circ/a}\, e^{j\gamma_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

$$\beta'^{(1)}_{2q}(s^\circ) = \frac{b_\circ}{2Z_\circ k a(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[-(\gamma_{2q}+\gamma_n)(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_{2q}s^\circ/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_n)(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q)e^{-j\gamma_n s_1^\circ/a}\, e^{j\gamma_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

TE$_{2q}$

$$b'^{(1)}_{0q}(s^\circ) = \frac{b_\circ}{2\gamma_{0q}(\gamma_{0q}^2-\gamma_n^2)}\left[(\gamma_{0q}+\gamma_n)(e_q-\gamma_n\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_{0q}s^\circ/a} + (\gamma_{0q}-\gamma_n)(e_q+\gamma_n\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_n s_1^\circ/a}\, e^{j\gamma_{0q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

TE$_{0q}$

$$\beta'^{(1)}_{0q}(s^\circ) = \frac{b_\circ}{2Z_\circ k a(\gamma_{0q}^2-\gamma_n^2)}\left[-(\gamma_{0q}+\gamma_n)(e_q-\gamma_n\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_{0q}s^\circ/a} + (\gamma_{0q}-\gamma_n)(e_q+\gamma_n\gamma_{0q}h_q)e^{-j\gamma_n s_1^\circ/a}\, e^{j\gamma_{0q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$\overset{\prime(1)}{a}_{2q}(s^\circ) = -\frac{F_q b_o}{2(\nu_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{2q}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{2q}s^\circ/a} + (\nu_{2q}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_1^\circ/a}\, e^{j\nu_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

$$\overset{\prime(1)}{\alpha}_{2q}(s^\circ) = -\frac{F_q k a b_o}{2Z_o\nu_{2q}(\nu_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{2q}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{2q}s^\circ/a} - (\nu_{2q}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_1^\circ/a}\, e^{j\nu_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right] \qquad TM_{2q}$$

$$\overset{\prime(1)}{a}_{oq}(s^\circ) = -\frac{d_q b_o}{2(\nu_{oq}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{oq}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{oq}s^\circ/a} + (\nu_{oq}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_1^\circ/a}\, e^{j\nu_{oq}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

$$\overset{\prime(1)}{\alpha}_{oq}(s^\circ) = -\frac{d_q k a b_o}{2Z_o\nu_{oq}(\nu_{oq}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\nu_{oq}+\gamma_{11})^2 e^{-j\nu_{oq}s^\circ/a} - (\nu_{oq}-\gamma_{11})^2 e^{-j\gamma_{11}s_1^\circ/a}\, e^{j\nu_{oq}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right] \qquad TM_{oq}$$

$$\overset{\prime(1)}{b}_{2q}(s^\circ) = \frac{b_o}{2\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[(\gamma_{2q}+\gamma_{11})(f_q+\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{2q}s^\circ/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_{11})(f_q-\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{11}s_1^\circ/a}\, e^{j\gamma_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right]$$

$$\overset{\prime(1)}{\beta}_{2q}(s^\circ) = \frac{b_o}{2Z_o ka(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)}\left[-(\gamma_{2q}+\gamma_{11})(f_q+\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{2q}s^\circ/a} + (\gamma_{2q}-\gamma_{11})(f_q-\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q) e^{-j\gamma_{11}s_1^\circ/a}\, e^{j\gamma_{2q}(s^\circ-s_1^\circ)/a}\right] \qquad TE_{2q}$$

(6)

ANNEXE F

SOLUTION D'ORDRE (2) DU MODE TE_{11} À L'ENTRÉE ET À LA SORTIE DU COUDE.

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$b_n^{(2)}(0) = \frac{b_o}{2}\eta_2\left(1 - e^{-2j\gamma_o S_i^o/a}\right) + \frac{b_o}{4v_n^2\gamma_n}\sum_q \left\{ \frac{v_{oq}^2}{\gamma_{oq}(\gamma_{oq}^2-\gamma_n^2)}\left[\left(e_q^2-\gamma_n^2\gamma_{oq}^2h_q^2\right)\left(2e^{-j(\gamma_n+\gamma_{oq})S_i^o/a} - e^{-2j\gamma_n S_i^o/a} - 1\right) - 2\gamma_n\gamma_{oq}h_q\left(e_q-\gamma_{oq}^2h_q\right)\left(e^{-2j\gamma_n S_i^o/a}-1\right)\right] + \right.$$

$$+ \frac{v_{2q}^2}{\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[\left(f_q^2-\gamma_n^2\gamma_{2q}^2g_q^2\right)\left(2e^{-j(\gamma_n+\gamma_{2q})S_i^o/a} - e^{-2j\gamma_n S_i^o/a} - 1\right) + 2\gamma_n\gamma_{2q}g_q\left(f_q+\gamma_{2q}^2g_q\right)\left(e^{-2j\gamma_n S_i^o/a}-1\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{u_{2q}^2k^2a^2F_q^2v_{2q}}{(v_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[\left(1-\frac{\gamma_n^2}{v_{2q}^2}\right)\left(2e^{-j(\gamma_n+v_{2q})S_i^o/a} - e^{-2j\gamma_n S_i^o/a} - 1\right) + 4\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\left(e^{-2j\gamma_n S_i^o/a}-1\right)\right]\right\}$$

$$b_n^{(2)}(S_i^o) = \frac{b_o}{4v_n^2\gamma_n}e^{-j\gamma_n S_i^o/a}\sum_q \left\{ \frac{v_{oq}^2}{(\gamma_{oq}^2-\gamma_n^2)^2}\gamma_{oq}\left[\left(1+\frac{\gamma_n}{\gamma_{oq}}\right)^2\left(e_q-\gamma_n\gamma_{oq}h_q\right)^2\left(e^{j(\gamma_n-\gamma_{oq})S_i^o/a}-1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{oq}}\right)^2\left(e_q+\gamma_n\gamma_{oq}h_q\right)^2\left(e^{-j(\gamma_n+\gamma_{oq})S_i^o/a}-1\right)\right] + \right.$$

$$+ \frac{v_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}\gamma_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{j(\gamma_n-\gamma_{2q})S_i^o/a}-1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{-j(\gamma_n+\gamma_{2q})S_i^o/a}-1\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{u_{2q}^2k^4a^4F_q^2v_{2q}^2}{(v_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}v_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\right)^4\left(e^{j(\gamma_n-v_{2q})S_i^o/a}-1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\right)^4\left(e^{-j(\gamma_n+v_{2q})S_i^o/a}-1\right)\right]\right\}$$

(1)

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$b_{\parallel}^{(2)}(0) = \frac{b_0}{2}\xi_{S_2}\left(1 - e^{-2j\gamma_{\parallel}S_1^*/a}\right) + \frac{b_0}{4U_{\parallel}^2\gamma_{\parallel}}\sum_q\left\{\frac{u_{0q}^2k^2a^2d_q\nu_{0q}}{(\nu_{0q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\left[\left(1-\frac{\gamma_{\parallel}^2}{\nu_{0q}^2}\right)\left(2e^{-j(\gamma_{\parallel}+\nu_{0q})S_1^*/a} - e^{-2j\gamma_{\parallel}S_1^*/a} - 1\right) + 4\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{0q}}\left(e^{-2j\gamma_{\parallel}S_1^*/a} - 1\right)\right] + \right.$$
$$+ \frac{U_{2q}^2}{\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\left[\left(f_q^2-\gamma_{\parallel}^2\gamma_{2q}^2g_q^2\right)\left(2e^{-j(\gamma_{\parallel}+\gamma_{2q})S_1^*/a} - e^{-2j\gamma_{\parallel}S_1^*/a} - 1\right) + 2\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q\left(f_q+\gamma_{2q}^2g_q\right)\left(e^{-2j\gamma_{\parallel}S_1^*/a} - 1\right)\right] +$$
$$\left. + \frac{u_{2q}^2k^2a^2F_q^2\nu_{2q}}{(\nu_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\left[\left(1-\frac{\gamma_{\parallel}^2}{\nu_{2q}^2}\right)\left(2e^{-j(\gamma_{\parallel}+\nu_{2q})S_1^*/a} - e^{-2j\gamma_{\parallel}S_1^*/a} - 1\right) + 4\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{2q}}\left(e^{-2j\gamma_{\parallel}S_1^*/a} - 1\right)\right]\right\}$$

$$b_{\parallel}^{(2)}(S_1^*) = \frac{b_0}{4U_{\parallel}^2\gamma_{\parallel}}e^{-j\gamma_{\parallel}S_1^*/a}\sum_q\left\{\frac{u_{0q}^2k^2a^2d_q^2\nu_{0q}^2}{(\nu_{0q}^2-\gamma_{\parallel}^2)}\nu_{0q}\left[\left(1+\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{0q}}\right)^4\left(e^{j(\gamma_{\parallel}-\nu_{0q})S_1^*/a} - 1\right) + \left(1-\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{0q}}\right)^4\left(e^{-j(\gamma_{\parallel}+\nu_{0q})S_1^*/a} - 1\right)\right] + \right.$$
$$+ \frac{U_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)^2}\gamma_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q+\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{j(\gamma_{\parallel}-\gamma_{2q})S_1^*/a} - 1\right) + \left(1-\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q-\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{-j(\gamma_{\parallel}+\gamma_{2q})S_1^*/a} - 1\right)\right] +$$
$$\left. + \frac{u_{2q}^2k^2a^2F_q^2\nu_{2q}^2}{(\nu_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)^2}\nu_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{2q}}\right)^4\left(e^{j(\gamma_{\parallel}-\nu_{2q})S_1^*/a} - 1\right) + \left(1-\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{2q}}\right)^4\left(e^{-j(\gamma_{\parallel}+\nu_{2q})S_1^*/a} - 1\right)\right]\right\}$$

(2)

ANNEXE G

EXPRESSIONS DES COEFFICIENTS Q_q , T_q

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$
\begin{aligned}
Q_q^{\perp}(ka) = {} & \frac{\eta_2}{2}\left(1 - e^{-2j\gamma_n^{\perp} s_1/a}\right) + \frac{1}{4U_n^2\gamma_n}\sum_q \left\{ \frac{U_{0q}^2}{\gamma_{0q}(\gamma_{0q}^2-\gamma_n^2)}\left[\left(e_q^2-\gamma_n^2\gamma_{0q}^2h_q^2\right)\left(2e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{0q}^{\perp})s_1/a} - e^{-2j\gamma_0^{\perp}s_1/a} - 1\right) - 2\gamma_n\gamma_{0q}h_q\left(e_q-\gamma_{0q}^2h_q\right)\left(e^{-2j\gamma_n^{\perp}s_1/a}-1\right)\right] + \right. \\
& + \frac{U_{2q}^2}{\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[\left(f_q^2-\gamma_n^2\gamma_{2q}^2g_q^2\right)\left(2e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{2q}^{\perp})s_1/a} - e^{-2j\gamma_n^{\perp}s_1/a} - 1\right) + 2\gamma_n\gamma_{2q}g_q\left(f_q+\gamma_{2q}^2g_q\right)\left(e^{-2j\gamma_n^{\perp}s_1/a}-1\right)\right] + \\
& \left. + \frac{u_{2q}^2k^2a^2F_q^2\nu_{2q}}{(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)}\left[\left(1-\frac{\gamma_n^2}{\nu_{2q}^2}\right)\left(2e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\nu_{2q}^{\perp})s_1/a} - e^{-2j\gamma_n^{\perp}s_1/a} - 1\right) + 4\frac{\gamma_n}{\nu_{2q}}\left(e^{-2j\gamma_n^{\perp}s_1/a}-1\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_q^{\perp}(ka) = {} & \frac{1}{4U_n^2\gamma_n}\sum_q \left\{ \frac{U_{0q}^2}{(\gamma_{0q}^2-\gamma_n^2)^2}\gamma_{0q}\left[\left(1+\frac{\gamma_n}{\gamma_{0q}}\right)^2\left(e_q-\gamma_n\gamma_{0q}h_q\right)^2\left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-\gamma_{0q}^{\perp})s_1/a}-1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{0q}}\right)^2\left(e_q+\gamma_n\gamma_{0q}h_q\right)^2\left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{0q}^{\perp})s_1/a}-1\right)\right] + \right. \\
& + \frac{U_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}\gamma_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-\gamma_{2q}^{\perp})s_1/a}-1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{2q}^{\perp})s_1/a}-1\right)\right] + \\
& \left. + \frac{u_{2q}^2k^2a^2F_q^2\nu_{2q}^2}{(\nu_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}\nu_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_n}{\nu_{2q}}\right)^4\left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-\nu_{2q}^{\perp})s_1/a}-1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{\nu_{2q}}\right)^4\left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\nu_{2q}^{\perp})s_1/a}-1\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

(1)

II - <u>POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE</u>

$$\begin{aligned}
Q_q''(ka) = {} & \frac{\xi_2}{2}\left(1 - e^{-2j\gamma_n'' s_1/a}\right) + \frac{1}{4\sigma_n^2\gamma_n}\sum_q\Bigg\{\frac{u_{oq}^2 k^2a^2 d_q^2 v_{oq}}{(v_{oq}^2-\gamma_n^2)}\Bigg[\left(1-\frac{\gamma_n^2}{v_{oq}^2}\right)\left(2e^{-j(\gamma_n''+v_{oq}'')s_1/a} - e^{-2j\gamma_n'' s_1/a} - 1\right) + 4\frac{\gamma_n}{v_{oq}}\left(e^{-2j\gamma_n'' s_1/a} - 1\right)\Bigg] + \\
& + \frac{\sigma_{2q}^2}{\gamma_{2q}(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)}\Bigg[\left(f_q^2-\gamma_n^2\gamma_{2q}^2 g_q^2\right)\left(2e^{-j(\gamma_n''+\gamma_{2q}'')s_1/a} - e^{-2j\gamma_n'' s_1/a} - 1\right) + 2\gamma_n\gamma_{2q} g_q\left(f_q+\gamma_{2q}^2 g_q\right)\left(e^{-2j\gamma_n'' s_1/a} - 1\right)\Bigg] + \\
& + \frac{u_{2q}^2 k^2a^2 F_q^2 v_{2q}}{(v_{2q}^2-\gamma_n^2)}\Bigg[\left(1-\frac{\gamma_n^2}{v_{2q}^2}\right)\left(2e^{-j(\gamma_n''+v_{2q}'')s_1/a} - e^{-2j\gamma_n'' s_1/a} - 1\right) + 4\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\left(e^{-2j\gamma_n'' s_1/a} - 1\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_q''(ka) = {} & \frac{1}{4\sigma_n^2\gamma_n}\sum_q\Bigg\{\frac{u_{oq}^2 k^2a^2 d_q^2 v_{oq}^2}{(v_{oq}^2-\gamma_n^2)}v_{oq}\Bigg[\left(1+\frac{\gamma_n}{v_{oq}}\right)^4\left(e^{j(\gamma_n''-v_{oq}'')s_1/a} - 1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{v_{oq}}\right)^4\left(e^{-j(\gamma_n''+v_{oq}'')s_1/a} - 1\right)\Bigg] + \\
& + \frac{\sigma_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}\gamma_{2q}\Bigg[\left(1+\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{j(\gamma_n''-\gamma_{2q}'')s_1/a} - 1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(e^{-j(\gamma_n''+\gamma_{2q}'')s_1/a} - 1\right)\Bigg] + \\
& + \frac{u_{2q}^2 k^2a^2 F_q^2 v_{2q}^2}{(v_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}v_{2q}\Bigg[\left(1+\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\right)^4\left(e^{j(\gamma_n''-v_{2q}'')s_1/a} - 1\right) + \left(1-\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\right)^4\left(e^{-j(\gamma_n''+v_{2q}'')s_1/a} - 1\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

(2)

EXPRESSIONS DES COEFFICIENTS $S_q^{\perp}$, $S_q^{\parallel}$

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$
\begin{aligned}
S_q^{\perp}(ka, L) = \frac{1}{4 v_n^2 \gamma_n} \sum_q \Bigg\{ & \frac{v_{0q}^2}{(\gamma_{0q}^2-\gamma_n^2)^2}\, \gamma_{0q} \Bigg[\left(1+\frac{\gamma_n}{\gamma_{0q}}\right)^2 \left(e_q-\gamma_n\gamma_{0q}h_q\right)^2 \left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-\gamma_{0q}^{\perp})S_1/a}-1\right)\left[2+\left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-\gamma_{0q}^{\perp})S_1/a}-1\right)e^{j(\gamma_n-\gamma_{0q})L/a}\right]+ \\
& + \left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{0q}}\right)^2 \left(e_q+\gamma_n\gamma_{0q}h_q\right)^2 \left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{0q}^{\perp})S_1/a}-1\right)\left[2+\left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{0q}^{\perp})S_1/a}-1\right)e^{-j(\gamma_n+\gamma_{0q})L/a}\right]\Bigg]+ \\
& + \frac{v_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}\, \gamma_{2q} \Bigg[\left(1+\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2 \left(f_q+\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2 \left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-\gamma_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)\left[2+\left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-\gamma_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)e^{j(\gamma_n-\gamma_{2q})L/a}\right]+ \\
& + \left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{2q}}\right)^2 \left(f_q-\gamma_n\gamma_{2q}g_q\right)^2 \left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)\left[2+\left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+\gamma_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)e^{-j(\gamma_n+\gamma_{2q})L/a}\right]\Bigg]+ \\
& + \frac{u_{2q}^2 k^2 a^2 f_q^2 v_{2q}^2}{(v_{2q}^2-\gamma_n^2)^2}\, v_{2q} \Bigg[\left(1+\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\right)^4 \left(e^{j(\gamma_n^{\perp}-v_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)\left[2+\left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}-v_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)e^{j(\gamma_n-v_{2q})L/a}\right]+ \\
& + \left(1-\frac{\gamma_n}{v_{2q}}\right)^4 \left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+v_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)\left[2+\left(e^{-j(\gamma_n^{\perp}+v_{2q}^{\perp})S_1/a}-1\right)e^{-j(\gamma_n+v_{2q})L/a}\right]\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

(3)

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$
\begin{aligned}
S''_q(ka,L) = \frac{1}{4U_{\parallel}^2\gamma_{\parallel}} \sum_q \Bigg\{ & \frac{u_{0q}^2 k^2 a^2 d_q^2 \nu_{0q}^2}{(\nu_{0q}^2-\gamma_{\parallel}^2)^2}\, \nu_{0q}\Bigg[\Big(1+\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{0q}}\Big)^4\Big(e^{j(\gamma''_{\parallel}-\nu''_{0q})s_1/a}-1\Big)\Big[2+\Big(e^{j(\gamma''_{\parallel}-\nu''_{0q})s_1/a}-1\Big)e^{j(\gamma_{\parallel}-\nu_{0q})L/a}\Big]+ \\
& +\Big(1-\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{0q}}\Big)^4\Big(e^{-j(\gamma''_{\parallel}+\nu''_{0q})s_1/a}-1\Big)\Big[2+\Big(e^{-j(\gamma''_{\parallel}+\nu''_{0q})s_1/a}-1\Big)e^{-j(\gamma_{\parallel}+\nu_{0q})L/a}\Big]\Bigg]+ \\
& +\frac{\upsilon_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)^2}\,\gamma_{2q}\Bigg[\Big(1+\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{2q}}\Big)^2\Big(f_q+\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q\Big)^2\Big(e^{j(\gamma''_{\parallel}-\gamma''_{2q})s_1/a}-1\Big)\Big[2+\Big(e^{j(\gamma''_{\parallel}-\gamma''_{2q})s_1/a}-1\Big)e^{j(\gamma_{\parallel}-\gamma_{2q})L/a}\Big]+ \\
& +\Big(1-\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{2q}}\Big)^2\Big(f_q-\gamma_{\parallel}\gamma_{2q}g_q\Big)^2\Big(e^{-j(\gamma''_{\parallel}+\gamma''_{2q})s_1/a}-1\Big)\Big[2+\Big(e^{-j(\gamma''_{\parallel}+\gamma''_{2q})s_1/a}-1\Big)e^{-j(\gamma_{\parallel}+\gamma_{2q})L/a}\Big]\Bigg]+ \\
& +\frac{u_{2q}^2 k^2 a^2 F_q^2 \nu_{2q}^2}{(\nu_{2q}^2-\gamma_{\parallel}^2)^2}\,\nu_{2q}\Bigg[\Big(1+\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{2q}}\Big)^4\Big(e^{j(\gamma''_{\parallel}-\nu''_{2q})s_1/a}-1\Big)\Big[2+\Big(e^{j(\gamma''_{\parallel}-\nu''_{2q})s_1/a}-1\Big)e^{j(\gamma_{\parallel}-\nu_{2q})L/a}\Big]+ \\
& +\Big(1-\frac{\gamma_{\parallel}}{\nu_{2q}}\Big)^4\Big(e^{-j(\gamma''_{\parallel}+\nu''_{2q})s_1/a}-1\Big)\Big[2+\Big(e^{-j(\gamma''_{\parallel}+\nu''_{2q})s_1/a}-1\Big)e^{-j(\gamma_{\parallel}+\nu_{2q})L/a}\Big]\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

(4)

ÉQUATION DE L'ENVELOPPE POUR LES DEUX POLARISATIONS.

$$Tq^{\perp}_{min}(ka) = -\frac{1}{2\upsilon_s^2\gamma_s}\sum_q\left\{\frac{\upsilon_{oq}^2}{(\gamma_{oq}^2-\gamma_s^2)}\gamma_{oq}\left[\left(1+\frac{\gamma_{ii}}{\gamma_{oq}}\right)^2\left(e_q-\gamma_{ii}\gamma_{oq}h_q\right)^2+\left(1-\frac{\gamma_s}{\gamma_{oq}}\right)^2\left(e_q+\gamma_s\gamma_{oq}h_q\right)^2\right]+\right.$$

$$+\frac{\upsilon_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_{ii}^2)^2}\gamma_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_{ii}}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q+\gamma_{ii}\gamma_{2q}g_q\right)^2+\left(1-\frac{\gamma_{ii}}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q-\gamma_{ii}\gamma_{2q}g_q\right)^2\right]+$$

$$\left.+\frac{u_{2q}^2K^2a^2F_q^2\nu_{2q}^2}{(\nu_{2q}^2-\gamma_{ii}^2)^2}\nu_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_s}{\nu_{2q}}\right)^4+\left(1-\frac{\gamma_s}{\nu_{2q}}\right)^4\right]\right\} \quad (5)$$

$$Tq^{\parallel}_{min}(ka) = -\frac{1}{2\upsilon_{ii}^2\gamma_{ii}}\sum_q\left\{\frac{u_{oq}^2K^2a^2d_q^2\nu_{oq}^2}{(\nu_{oq}^2-\gamma_{ii}^2)^2}\nu_{oq}\left[\left(1+\frac{\gamma_{ii}}{\nu_{oq}}\right)^4+\left(1-\frac{\gamma_{ii}}{\nu_{oq}}\right)^4\right]+\right.$$

$$+\frac{\upsilon_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_s^2)^2}\gamma_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_{ii}}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q+\gamma_s\gamma_{2q}g_q\right)^2+\left(1-\frac{\gamma_s}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q-\gamma_s\gamma_{2q}g_q\right)^2\right]+$$

$$\left.\frac{u_{2q}^2K^2a^2F_q^2\nu_{2q}^2}{(\nu_{2q}^2-\gamma_{ii}^2)^2}\nu_{2q}\left[\left(1+\frac{\gamma_s}{\nu_{2q}}\right)^4+\left(1-\frac{\gamma_{ii}}{\nu_{2q}}\right)^4\right]\right\}. \quad (6)$$

$$\left(\frac{P_t}{P_i}\right)^{\perp}_{min} = 1+2\frac{a^2}{R^2}\,\mathrm{Re}\left\{Tq^{\perp}_{min}(ka)\right\} \quad (7)$$

$$\left(\frac{P_t}{P_i}\right)^{\parallel}_{min} = 1+2\frac{a^2}{R^2}\,\mathrm{Re}\left\{Tq^{\parallel}_{min}(ka)\right\} \quad (8)$$

ANNEXE H

RELATIONS ÉNERGÉTIQUES

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$P_R^{\perp}(TM_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2}\,\frac{1}{4\sigma_{11}^2\gamma_{11}}\sum_q \frac{u_{2q}^2 k^2 a^2 F_q^2 v_{2q}^2}{(v_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2}\, v_{2q}\left(1-\frac{\gamma_{11}}{v_{2q}}\right)^4\left(2-e^{-j(\gamma_{11}^{\perp}+v_{2q}^{\perp})s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}^{\perp}+v_{2q}^{\perp})s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_T^{\perp}(TM_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2}\,\frac{1}{4\sigma_{11}^2\gamma_{11}}\sum_q \frac{u_{2q}^2 k^2 a^2 F_q^2 v_{2q}^2}{(v_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2}\, v_{2q}\left(1+\frac{\gamma_{11}}{v_{2q}}\right)^4\left(2-e^{-j(\gamma_{11}^{\perp}-v_{2q}^{\perp})s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}^{\perp}-v_{2q}^{\perp})s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_R^{\perp}(TE_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2}\,\frac{1}{4\sigma_{11}^2\gamma_{11}}\sum_q \frac{U_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2}\,\gamma_{2q}\left(1-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q-\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(2-e^{-j(\gamma_{11}^{\perp}+\gamma_{2q}^{\perp})s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}^{\perp}+\gamma_{2q}^{\perp})s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_T^{\perp}(TE_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2}\,\frac{1}{4\sigma_{11}^2\gamma_{11}}\sum_q \frac{U_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2}\,\gamma_{2q}\left(1+\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right)^2\left(f_q+\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q\right)^2\left(2-e^{-j(\gamma_{11}^{\perp}-\gamma_{2q}^{\perp})s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}^{\perp}-\gamma_{2q}^{\perp})s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_R^{\perp}(TE_{0q}) = \left[\frac{a^2}{R^2}\,\frac{1}{4\sigma_{11}^2\gamma_{11}}\sum_q \frac{U_{0q}^2}{(\gamma_{0q}^2-\gamma_{11}^2)^2}\,\gamma_{0q}\left(1-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{0q}}\right)^2\left(e_q+\gamma_{11}\gamma_{0q}h_q\right)^2\left(2-e^{-j(\gamma_{11}^{\perp}+\gamma_{0q}^{\perp})s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}^{\perp}+\gamma_{0q}^{\perp})s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_T^{\perp}(TE_{0q}) = \left[\frac{a^2}{R^2}\,\frac{1}{4\sigma_{11}^2\gamma_{11}}\sum_q \frac{U_{0q}^2}{(\gamma_{0q}^2-\gamma_{11}^2)^2}\,\gamma_{0q}\left(1+\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{0q}}\right)^2\left(e_q-\gamma_{11}\gamma_{0q}h_q\right)^2\left(2-e^{-j(\gamma_{11}^{\perp}-\gamma_{0q}^{\perp})s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}^{\perp}-\gamma_{0q}^{\perp})s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_R^{\perp}(TE_{11}) \simeq 0$$

$$P_T^{\perp}(TE_{11}) = \left[1+2\frac{a^2}{R^2}\,\mathrm{Re}\left\{T_q^{\perp}(ka)\right\}\right] P_I(TE_{11}) \qquad (1)$$

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

$$P_R''(TM_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2} \frac{1}{4\sigma_{11}^2 \gamma_{11}} \sum_q \frac{u_{2q}^2 k^2 a^2 F_q^2 v_{2q}^2}{(v_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2} v_{2q} \left(1-\frac{\gamma_{11}}{v_{2q}}\right)^4 \left(2-e^{-j(\gamma_{11}''+v_{2q}'')s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}''+v_{2q}'')s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_T''(TM_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2} \frac{1}{4\sigma_{11}^2 \gamma_{11}} \sum_q \frac{u_{2q}^2 k^2 a^2 F_q^2 v_{2q}^2}{(v_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2} v_{2q} \left(1+\frac{\gamma_{11}}{v_{2q}}\right)^4 \left(2-e^{-j(\gamma_{11}''-v_{2q}'')s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}''-v_{2q}'')s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_R''(TE_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2} \frac{1}{4\sigma_{11}^2 \gamma_{11}} \sum_q \frac{\upsilon_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2} \gamma_{2q} \left(1-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right)^2 \left(f_q-\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q\right)^2 \left(2-e^{-j(\gamma_{11}''+\gamma_{2q}'')s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}''+\gamma_{2q}'')s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_T''(TE_{2q}) = \left[\frac{a^2}{R^2} \frac{1}{4\sigma_{11}^2 \gamma_{11}} \sum_q \frac{\upsilon_{2q}^2}{(\gamma_{2q}^2-\gamma_{11}^2)^2} \gamma_{2q} \left(1+\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right)^2 \left(f_q+\gamma_{11}\gamma_{2q}g_q\right)^2 \left(2-e^{-j(\gamma_{11}''-\gamma_{2q}'')s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}''-\gamma_{2q}'')s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_R''(TM_{0q}) = \left[\frac{a^2}{R^2} \frac{1}{4\sigma_{11}^2 \gamma_{11}} \sum_q \frac{u_{0q}^2 k^2 a^2 d_q^2 v_{0q}^2}{(v_{0q}^2-\gamma_{11}^2)^2} v_{0q} \left(1-\frac{\gamma_{11}}{v_{0q}}\right)^4 \left(2-e^{-j(\gamma_{11}''+v_{0q}'')s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}''+v_{0q}'')s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_T''(TM_{0q}) = \left[\frac{a^2}{R^2} \frac{1}{4\sigma_{11}^2 \gamma_{11}} \sum_q \frac{u_{0q}^2 k^2 a^2 d_q^2 v_{0q}^2}{(v_{0q}^2-\gamma_{11}^2)^2} v_{0q} \left(1+\frac{\gamma_{11}}{v_{0q}}\right)^4 \left(2-e^{-j(\gamma_{11}''-v_{0q}'')s_1/a}-e^{j(\gamma_{11}''-v_{0q}'')s_1/a}\right)\right] P_I(TE_{11})$$

$$P_R''(TE_{11}) \simeq 0$$

$$P_T''(TE_{11}) = \left[1+2\frac{a^2}{R^2} \mathrm{Re}\left\{T_q''(ka)\right\}\right] P_I(TE_{11})$$

(2)

ANNEXE I

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

On considère un système d'équations différentielles homogènes à coefficier constants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial s} &= a_{11}\, x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{\partial x_{11}}{\partial s} &= a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n \end{aligned} \qquad (1)$$

ou, sous forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial s} \{X\} = \{A\} \{X\} \qquad (2)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

On cherche les solutions particulières du système sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1\, e^{\lambda s} \\ x_2 &= y_2\, e^{\lambda s} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= y_n\, e^{\lambda s} \end{aligned} \qquad (4)$$

ou sous forme matricielle :

$$\{X\} = \{Y\} e^{\lambda s} \tag{5}$$

avec $\{X\}$ donné par (3) et $\{Y\}$ donné par :

$$\{Y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

En remplaçant l'équation (5) dans le système (2) on aboutit à un système linéaire homogène :

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \dots + a_{1n} y_n = 0 \\ a_{21} y_1 + (a_{22} - \lambda) y_2 + \dots\, + a_{2n}\, y_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots\, + (a_{nn} - \lambda)\, y_n = 0 \end{array} \tag{6}$$

où

$$(A - \lambda I)\, Y = 0 \tag{7}$$

avec I la matrice unitaire.

L'équation (7) a des solutions non nulles si et seulement si le déterminant du système est nul, c'est-à-dire :

$$\det\, (A - \lambda I) = 0 \tag{8}$$

Le déterminant (8) est appelé déterminant caractéristique de la matrice A et l'équation (7) est dite équation caractéristique de la matrice A Sous une forme développée, l'équation caractéristique s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

L'équation caractéristique (9) se met sous la forme d'un polynôme appelé polynôme caractéristique donné par :

$$\lambda^{n} - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_n \lambda + (-1)^{n} \sigma_n = 0 \qquad (10)$$

L'équation (10) est une équation algébrique de degré n par rapport à λ et possède au moins une racine réelle ou complexe. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines distinctes de (10). Ces racines sont les valeurs propres de la matrice A.

Prenons une racine quelconque $\lambda_j = \lambda$ et portons la dans l'équation (7). On a alors :

$$(A - \lambda_j\ I)\ Y = 0 \qquad (11)$$

Le déterminant du système (11) étant :

$$\det (A - \lambda_j\ I) = 0$$

Ce système a forcément des solutions non nulles qui sont les vecteurs propres de la matrice A associées à la valeur λ_j. Si le rang de la matrice $A - \lambda_j I$ est r avec $r < n$, il existe $K = n-r$ vecteurs propres linéairement indépendants qui correspondent à la racine λ_j. Ici on se limite au cas où les racines de l'équation (10) sont distinctes, c'est-à-dire la multiplicité est un. Dans ce cas, à chaque valeur propre λ_j correspond, à un coefficient de proportionnalité près, un vecteur propre et un seul. Donc :

$$
\begin{aligned}
Y^{(\lambda_1)} &= (y_{11}, y_{12}, \ldots\ldots, y_{1n}) \\
Y^{(\lambda_2)} &= (y_{21}, y_{22}, \ldots\ldots, y_{2n}) \\
Y^{(\lambda_3)} &= (y_{31}, y_{32}, \ldots\ldots, y_{3n}) \\
&\;\vdots \\
Y^{(\lambda_n)} &= (y_{n1}, y_{n2}, \ldots\ldots, y_{nn})
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

La solution générale du système (1) est une combinaison linéaire de vecteurs propres (12)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_1\, y_{11}\, e^{\lambda_1 s} + C_2\, y_{21}\, e^{\lambda_2 s} + \ldots + C_n\, y_{n1} e^{\lambda_n s} \\
x_2 &= C_1\, y_{12}\, e^{\lambda_1 s} + C_2\, y_{22}\, e^{\lambda_2 s} + \ldots + C_n\, y_{n2} e^{\lambda_n s} \\
&\;\vdots \\
x_n &= C_1\, y_{1n}\, e^{\lambda_1 s} + C_2\, y_{2n}\, e^{\lambda_2 s} + \ldots + C_n\, y_{nn}\, e^{\lambda_n s}
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

On peut trouver les constantes arbitraires C_1, C_2 ... C_n en se donnant les conditions initiales du problème, ce qui nous permet enfin de calculer numériquement la solution $X = (x_1, x_2 \ldots . x_n)$ du système.

ANNEXE J

CALCUL DES VALEURS PROPRES PAR LA MÉTHODE DE DANILEVSKI.

Cette méthode consiste à ramener le déterminant caractéristique

$$\det (A - \lambda I) = 0 \qquad (1)$$

sous une forme dite "forme normale de Frobenius" donnée par

$$D_n(\lambda) = \begin{bmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \cdots\cdots & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Si nous parvenons à mettre le déterminant caractéristique sous la forme (2), on obtient en le développant suivant la première ligne :

$$D_n(\lambda)=(p_1-\lambda)(-\lambda)^{n-1}-p_2(-\lambda)^{n-2}+p_3(-\lambda)^{n-3}-\ldots\ldots + (-1)^{n-1}p_n \qquad (3)$$

ou

$$D_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-p_3\lambda^{n-3}- \ldots\ldots - p_n) \qquad (4)$$

Pour passer de (1) à (4) on a effectué sur les lignes et les colonnes des opérations qui laissent inchangé le déterminant.

La recherche des racines du polynôme (4) ne présente aucune difficulté en utilisant la méthode de Bairstow.

ANNEXE K

RECHERCHE DES RACINES D'UN POLYNOME DE DEGRÉ N PAR LA MÉTHODE DE BAIRSTOW.

Cette méthode est basée sur la division du polynôme :

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \qquad (1)$$

par un facteur quadratique :

$$G_2(x) = x^2 - s\,x + p \qquad (2)$$

Posons en effet :

$$P_n(x) = (x^2 - sx + p)\,Q_{n-2}(x) + R_1(x) \qquad (3)$$

avec $Q_{n-2}(x)$ le quotient et $R_1(x)$ le reste donnés par :

$$Q_{n-2}(x) = b_o x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \dots + b_{n-3} x + b_{n-2} \qquad (4)$$

$$R_1(x) = b_{n-1}\,(x-s) + b_n$$

Ces coefficients b_o, b_1, ..., b_{n-2}, b_{n-1}, b_n se calculent par la suite en identifiant les coefficients dans la division (3)

$$\begin{aligned}
b_o &= a_o \\
b_1 &= a_1 + s\,b_o \\
b_2 &= a_2 + s\,b_1 - p\,b_o \\
b_3 &= a_3 + s\,b_2 - p\,b_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + s\,b_{n-3} - p\,b_{n-1} \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + s\,b_{n-2} - p\,b_{n-3} \\
b_n &= a_n + s\,b_{n-1} - p\,b_{n-2}
\end{aligned} \qquad (5)$$

La méthode consiste, à partir des valeurs arbitraires de s, p par exemple $s_o = p_o = 0$ on calcule la suite (5) si :

$$\begin{aligned} F(s,p) &= b_{n-1} \\ G(s,p) &= b_n - s\, b_{n-1} \end{aligned} \qquad (6)$$

ne sont pas nulles à la précision choisie, on améliore les valeurs s_o, p_o par la formule d'itération de Newton à deux variables qui s'écrit ici :

$$\begin{aligned} s_{K+1} &= s_K + \frac{S}{\Delta} \\ p_{K+1} &= p_K + \frac{P}{\Delta} \end{aligned} \qquad (7)$$

avec :

$$S = F \frac{\partial G}{\partial p} - G \frac{\partial F}{\partial p}$$

$$P = G \frac{\partial F}{\partial s} - F \frac{\partial G}{\partial s}$$

$$\Delta = \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial p}$$

en posant :

$$\frac{\partial b_q}{\partial s} = C_{q-1}$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial S} - b_{n-1} = C_{n-1}$$

et en dérivant les relations (5) on obtient les expressions des coefficients S, p, Δ données par :

$$S = b_n C_{n-3} - b_{n-1} C_{n-2}$$

$$P = b_n C_{n-2} - b_{n-1} C_{n-1}$$

$$\Delta = C_{n-2}^2 - C_{n-1} C_{n-3}$$

Avec les nouvelles valeurs de s,p données par (7) on calcule à nouveau la suite (5) et ainsi de suite jusqu'à ce que $b_{n-1} = b_n = 0$

ANNEXE L

ALGORITHME DE LA PUISSANCE ITÉRÉE

On suppose que l'on connaît une approximation λ_o de la valeur propre que l'on désire calculer. Il faut alors rechercher la valeur propre et le vecteur propre associé. Pour cette résolution on applique l'algorithme de la puissance itérée dont le principe est le suivant :

Nous fixons un vecteur initial Y_o dont toutes les composantes sont égales à 1. A l'itération K, nous résolvons :

$$(A-\lambda_o I)\ V_{K+1} = Y_K \tag{1}$$

La multiplication à gauche des deux membres par $(A- \lambda_o I)^{-1}$ permet d'obtenir :

$$V_{K+1} = (A- \lambda_o I)^{-1}\ Y_K \tag{2}$$

Pour passer à l'itération suivante, il faut remplacer Y_K par :

$$Y_{K+1} = \frac{V_{K+1}}{\|V_{K+1}\|} \tag{3}$$

c'est-à-dire on obtient le vecteur suivant à partir de V_{K+1} en divisant toutes les composantes de ce dernier par celle de plus grand module. A chaque itération, un élément de Y_i est ainsi égal à l'unité et tout dépassement de capacité se trouve ainsi évité.

Lorsqu'à l'itération n+1 les vecteurs Y_n et Y_{n+1} sont égaux à la précision désirée près, nous avons :

$$(A- \lambda_o I)^{-1}\ Y_n = V_{n+1} = \beta\ Y_{n+1} \simeq \beta\ Y_n \tag{4}$$

et

$$Y_n = \beta(A - \lambda_o I)\ Y_n \tag{5}$$

β étant un scalaire, nous pouvons écrire :

$$(A- \lambda_o I) Y_n = \frac{1}{\beta}\ Y_n \tag{6}$$

et

$$A\ Y_n = (\lambda_o + \beta^{-1})Y_n = \lambda\ Y_n \tag{7}$$

On obtient alors :

$$\lambda = \lambda_o + \beta^{-1} \tag{8}$$

L'algorithme de la puissance itérée appliqué à une matrice permet de calculer la valeur propre la plus grande, en module, de cette matrice. β est donc la valeur propre la plus grande en module de la matrice $(A- \lambda_o I)^{-1}$ Par conséquent λ est la valeur propre la plus proche de celle qui est introduite au départ (λ_o).

Après avoir calculé la matrice $A- \lambda_o I$, on a à résoudre un système linéaire du type $(A- \lambda_o I)V = Y$ avec Y vecteur connu et V inconnu.

ANNEXE M

EXPRESSIONS DES COEFFICIENTS DE COUPLAGE

I - POLARISATION PERPENDICULAIRE AU PLAN DE SYMETRIE

$$\boxed{\text{MODE } TE_{11}}$$

$$H_1 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\,\frac{\upsilon_{21}\left[2k^2a^2\left(\upsilon_{11}^2+\upsilon_{21}^2-\upsilon_{21}^2\upsilon_{11}^2\right)-\upsilon_{11}^2\upsilon_{21}^2\left(4-\upsilon_{11}^2-\upsilon_{21}^2\right)\right]}{ka\,\upsilon_{11}\left(\upsilon_{21}^2-\upsilon_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(\upsilon_{11}^2-1\right)\left(\upsilon_{21}^2-1\right)}}$$

$$H_2 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\,\frac{\sqrt{2}\,\upsilon_{11}\upsilon_{01}^2\left(\upsilon_{01}^2+\upsilon_{11}^2-2k^2a^2\right)}{ka\left(\upsilon_{01}^2-\upsilon_{11}^2\right)^2\sqrt{\upsilon_{11}^2-1}}$$

$$E_1 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\,\frac{ka\,u_{21}}{\upsilon_{11}\left(u_{21}^2-\upsilon_{11}^2\right)\sqrt{\upsilon_{11}^2-1}}$$

$$L_1 = \frac{1}{Z_0}\,\frac{k^2a^2-\upsilon_{11}^2}{ka}$$

$$L_2 = Z_0\,ka$$

$$H_3 = Z_0\,\frac{a}{R}\,\frac{2\upsilon_{21}\,ka\left(\upsilon_{11}^2+\upsilon_{21}^2-\upsilon_{11}^2\upsilon_{21}^2\right)}{\upsilon_{11}\left(\upsilon_{21}^2-\upsilon_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(\upsilon_{11}^2-1\right)\left(\upsilon_{21}^2-1\right)}}$$

$$H_4 = -Z_0\,\frac{a}{R}\,\frac{2\sqrt{2}\,ka\,\upsilon_{01}^2\upsilon_{11}}{\left(\upsilon_{01}^2-\upsilon_{11}^2\right)\sqrt{\upsilon_{11}^2-1}}$$

$$E_2 = -Z_0^2\,E_1$$

MODE TE_{21}

$$H_5 = \frac{v_{11}^2}{v_{21}^2} H_1$$

$$H_6 = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{v_{31}\left[2k^2a^2\left(3v_{31}^2 + 3v_{21}^2 - v_{21}^2 v_{31}^2\right) - v_{31}^2 v_{21}^2\left(12 - v_{31}^2 - v_{21}^2\right)\right]}{ka\, v_{21}\left(v_{21}^2 - v_{31}^2\right)^2 \sqrt{\left(v_{31}^2 - 9\right)\left(v_{21}^2 - 4\right)}}$$

$$H_7 = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{v_{12}\left[2k^2a^2\left(v_{12}^2 + v_{21}^2 - v_{12}^2 v_{21}^2\right) - v_{12}^2 v_{21}^2\left(4 - v_{12}^2 - v_{21}^2\right)\right]}{ka\, v_{21}\left(v_{21}^2 - v_{12}^2\right)^2 \sqrt{\left(v_{12}^2 - 1\right)\left(v_{21}^2 - 4\right)}}$$

$$E_3 = -\frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{2ka\, u_{11}}{v_{21}\left(v_{21}^2 - u_{11}^2\right)\sqrt{v_{21}^2 - 4}}$$

$$E_4 = -\frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{2ka\, u_{31}}{v_{21}\left(v_{21}^2 - u_{31}^2\right)\sqrt{v_{21}^2 - 4}}$$

$$L_3 = \frac{1}{Z_0} \frac{k^2a^2 - v_{21}^2}{ka}$$

$$L_4 = L_2$$

$$H_8 = \frac{v_{11}^2}{v_{21}^2} H_3$$

$$H_9 = Z_0 \frac{a}{R} \frac{2 v_{31} ka\left(3v_{31}^2 + 3v_{21}^2 - v_{21}^2 v_{31}^2\right)}{v_{21}\left(v_{21}^2 - v_{31}^2\right)^2 \sqrt{\left(v_{31}^2 - 9\right)\left(v_{21}^2 - 4\right)}}$$

$$H_{10} = Z_0 \frac{a}{R} \frac{2 v_{12} ka\left(v_{12}^2 + v_{21}^2 - v_{21}^2 v_{12}^2\right)}{v_{21}\left(v_{21}^2 - v_{12}^2\right)^2 \sqrt{\left(v_{12}^2 - 1\right)\left(v_{21}^2 - 4\right)}}$$

$$E_5 = -Z_0^2 E_3$$

$$E_6 = -Z_0^2 E_4$$

MODE TE_{01}

$$H_{11} = \frac{v_{11}^2}{v_{01}^2} H_2$$

$$H_{12} = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{\sqrt{2}\, v_{12}^3 \left(v_{01}^2 + v_{12}^2 - 2k^2a^2 \right)}{ka \left(v_{01}^2 - v_{12}^2\right)^2 \sqrt{v_{12}^2 - 1}}$$

$$L_5 = \frac{1}{Z_0} \frac{k^2a^2 - v_{01}^2}{ka}$$

$$L_6 = L_2$$

$$H_{13} = \frac{v_{11}^2}{v_{01}^2} H_4$$

$$H_{14} = - Z_0 \frac{a}{R} \frac{2\sqrt{2}\, ka\, v_{12}^3}{\left(v_{01}^2 - v_{12}^2\right)^2 \sqrt{v_{12}^2 - 1}}$$

MODE TM_{11}

$$K_1 = - \frac{1}{Z_0} ka$$

$$E_7 = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{ka\, u_{21} \left(u_{21}^2 + u_{11}^2 \right)}{u_{11} \left(u_{21}^2 - u_{11}^2 \right)^2}$$

$$H_{15} = - \frac{v_{21}^2}{u_{11}^2} E_3$$

$$K_2 = - Z_0 \frac{k^2a^2 - u_{11}^2}{ka}$$

$$E_8 = Z_0 \frac{a}{R} \frac{u_{21}\left[k^2a^2 \left(u_{21}^2 + u_{11}^2 \right) - 2 u_{11}^2 u_{21}^2 \right]}{ka\, u_{11} \left(u_{21}^2 - u_{11}^2 \right)^2}$$

$$H_{16} = \frac{v_{21}^2}{u_{11}^2} E_5$$

MODE TE_{31}

$$H_{17} = \frac{v_{21}^2}{v_{31}^2} H_6$$

$$H_{18} = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{v_{41}\left[2k^2a^2\left(6v_{31}^2 + 6v_{41}^2 - v_{31}^2 v_{41}^2\right) - v_{31}^2 v_{41}^2\left(24 - v_{41}^2 - v_{31}^2\right)\right]}{ka\, v_{31}\left(v_{41}^2 - v_{31}^2\right)^2 \sqrt{\left(v_{31}^2 - 9\right)\left(v_{41}^2 - 16\right)}}$$

$$H_{19} = \frac{v_{21}^2}{v_{31}^2} H_9$$

$$H_{20} = Z_0 \frac{a}{R} \frac{2 v_{41}\, ka\left(6v_{31}^2 + 6v_{41}^2 - v_{31}^2 v_{41}^2\right)}{v_{31}\left(v_{41}^2 - v_{31}^2\right)^2 \sqrt{\left(v_{31}^2 - 9\right)\left(v_{41}^2 - 16\right)}}$$

$$L_7 = \frac{1}{Z_0} \frac{k^2a^2 - v_{31}^2}{ka}$$

$$L_8 = L_2$$

$$E_9 = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{3ka\, u_{21}}{v_{31}\left(u_{21}^2 - v_{31}^2\right)\sqrt{v_{31}^2 - 9}}$$

$$E_{10} = -Z_0^2 E_9$$

MODE TM_{21}

$$H_{21} = -\frac{v_{11}^2}{u_{21}^2} E_1$$

$$H_{22} = -\frac{v_{31}^2}{u_{21}^2} E_9$$

$$H_{23} = -\frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{ka\, v_{12}}{u_{21}\left(u_{21}^2 - v_{12}^2\right)\sqrt{v_{12}^2 - 1}}$$

$$H_{24} = -\frac{v_{11}^2}{u_{21}^2} E_2$$

$$H_{25} = -\frac{U_{31}^2}{u_{21}^2} E_{10}$$

$$H_{26} = -Z_0 H_{23}$$

$$K_3 = K_1$$

$$K_4 = -Z_0 \frac{k^2a^2 - u_{21}^2}{ka}$$

$$E_{11} = \frac{u_{11}^2}{u_{21}^2} E_7$$

$$E_{12} = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{ka\, u_{31}(u_{21}^2 + u_{31}^2)}{u_{21}(u_{21}^2 - u_{31}^2)^2}$$

$$E_{13} = \frac{u_{11}^2}{u_{21}^2} E_8$$

$$E_{14} = Z_0 \frac{a}{R} \frac{u_{31}\left[k^2a^2(u_{21}^2 + u_{31}^2) - 2u_{31}^2 u_{21}^2\right]}{ka\, u_{21}(u_{21}^2 - u_{31}^2)^2}$$

$$\boxed{\text{MODE } TE_{41}}$$

$$H_{27} = \frac{U_{31}^2}{U_{41}^2} H_{18}$$

$$H_{28} = \frac{U_{31}^2}{U_{41}^2} H_{20}$$

$$L_9 = \frac{1}{Z_0} \frac{k^2a^2 - U_{41}^2}{ka}$$

$$L_{10} = L_2$$

$$E_{15} = -\frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{4kau_{31}}{\upsilon_{41}(\upsilon_{41}^2 - u_{31}^2)\sqrt{\upsilon_{41}^2-16}}$$

$$E_{16} = -Z_0^2 E_{15}$$

MODE TE_{12}

$$H_{29} = \frac{\upsilon_{21}^2}{\upsilon_{12}^2} H_7 \qquad L_{11} = \frac{1}{Z_0}\frac{k^2a^2 - \upsilon_{12}^2}{ka}$$

$$H_{30} = \frac{\upsilon_{01}^2}{\upsilon_{12}^2} H_{12} \qquad E_{17} = -\frac{u_{21}^2}{\upsilon_{12}^2} H_{23}$$

$$H_{31} = \frac{\upsilon_{21}^2}{\upsilon_{12}^2} H_{10} \qquad L_{12} = L_2$$

$$H_{32} = \frac{\upsilon_{01}^2}{\upsilon_{12}^2} H_{14} \qquad E_{18} = -\frac{u_{21}^2}{\upsilon_{12}^2} H_{26}$$

MODE TM_{31}

$$H_{33} = -\frac{\upsilon_{21}^2}{u_{31}^2} E_4 \qquad K_5 = K_1$$

$$H_{34} = -\frac{\upsilon_{41}^2}{u_{31}^2} E_{15} \qquad E_{19} = \frac{u_{21}^2}{u_{31}^2} E_{11}$$

$$H_{35} = -\frac{\upsilon_{21}^2}{u_{31}^2} E_6 \qquad K_6 = -Z_0\frac{k^2a^2 - u_{31}^2}{ka}$$

$$H_{36} = -\frac{\upsilon_{41}^2}{u_{31}^2} E_{16} \qquad E_{20} = \frac{u_{21}^2}{u_{31}^2} E_{14}$$

II - POLARISATION PARALLELE AU PLAN DE SYMETRIE

MODE TE_{11}

$$L_1 = \frac{1}{Z_0}\frac{k^2a^2 - v_{11}^2}{ka}$$

$$E_1 = -\frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{01}}{v_{11}\left(u_{01}^2 - v_{11}^2\right)\sqrt{v_{11}^2-1}}$$

$$H_1 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{v_{21}\left[2k^2a^2\left(v_{11}^2 + v_{21}^2 - v_{21}^2 v_{11}^2\right) - v_{11}^2 v_{21}^2\left(4 - v_{21}^2 - v_{11}^2\right)\right]}{ka\,v_{11}\left(v_{21}^2 - v_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{11}^2-1\right)\left(v_{21}^2-4\right)}}$$

$$E_3 = -\frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{ka\,u_{21}}{v_{11}\left(u_{21}^2 - v_{11}^2\right)\sqrt{v_{11}^2-1}}$$

$$E_2 = -\frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{02}}{v_{11}\left(u_{02}^2 - v_{11}^2\right)\sqrt{v_{11}^2-1}}$$

$$E_4 = -Z_0^2 E_1$$

$$H_2 = Z_0\frac{a}{R}\frac{2ka\,v_{21}\left(v_{11}^2 + v_{21}^2 - v_{21}^2 v_{11}^2\right)}{v_{11}\left(v_{21}^2 - v_{11}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{11}^2-1\right)\left(v_{21}^2-1\right)}}$$

$$E_6 = -Z_0^2 E_3$$

$$E_5 = -Z_0^2 E_2$$

$$L_2 = Z_0\,ka$$

MODE TM_{01}

$$H_3 = -\frac{v_{11}^2}{u_{01}^2} E_1$$

$$K_1 = -\frac{1}{Z_0} ka$$

$$E_7 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{\sqrt{2}\,u_{11}\,ka\,(u_{01}^2 + u_{11}^2)}{u_{01}\,(u_{01}^2 - u_{11}^2)^2}$$

$$H_4 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{\sqrt{2}\,ka\,v_{12}}{u_{01}\,(u_{01}^2 - v_{12}^2)\sqrt{v_{12}^2 - 1}}$$

$$H_5 = -Z_0^2 H_3$$

$$K_2 = -Z_0\frac{k^2a^2 - u_{01}^2}{ka}$$

$$E_8 = Z_0\frac{a}{R}\frac{\sqrt{2}\,u_{11}\left[k^2a^2(u_{01}^2 + u_{11}^2) - 2u_{01}^2u_{11}^2\right]}{ka\,u_{01}\,(u_{01}^2 - u_{11}^2)^2}$$

$$H_6 = -Z_0^2 H_4$$

MODE TE_{21}

$$H_7 = \frac{v_{11}^2}{v_{21}^2} H_1$$

$$L_3 = \frac{1}{Z_0}\frac{k^2a^2 - v_{21}^2}{ka}$$

$$E_9 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{2ka\,u_{11}}{v_{21}\,(v_{21}^2 - u_{11}^2)\sqrt{v_{21}^2 - 4}}$$

$$H_8 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{v_{31}\left[2k^2a^2(3v_{31}^2 + 3v_{21}^2 - v_{21}^2v_{31}^2) - v_{31}^2v_{21}^2(12 - v_{31}^2 - v_{21}^2)\right]}{ka\,v_{21}\,(v_{21}^2 - v_{31}^2)^2\sqrt{(v_{31}^2 - 9)(v_{21}^2 - 4)}}$$

$$H_9 = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{v_{12}\left[2k^2a^2\left(v_{12}^2+v_{21}^2-v_{12}^2v_{21}^2\right)-v_{12}^3v_{21}^2\left(4-v_{21}^2-v_{12}^2\right)\right]}{ka\,v_{21}\left(v_{21}^2-v_{12}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{12}^2-1\right)\left(v_{21}^2-4\right)}}$$

$$E_{10} = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{2ka\,u_{31}}{v_{21}\left(v_{21}^2-u_{31}^2\right)\sqrt{v_{21}^2-4}}$$

$$H_{10} = \frac{v_{11}^2}{v_{21}^2}H_2$$

$$L_4 = L_2$$

$$E_{11} = -Z_0^2E_9$$

$$H_{11} = Z_0\frac{a}{R}\frac{2ka\,v_{31}\left(3v_{31}^2+3v_{21}^2-v_{31}^2v_{21}^2\right)}{v_{21}\left(v_{21}^2-v_{31}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{31}^2-9\right)\left(v_{21}^2-4\right)}}$$

$$H_{12} = Z_0\frac{a}{R}\frac{2ka\,v_{12}\left(v_{12}^2+v_{21}^2-v_{21}^2v_{12}^2\right)}{v_{21}\left(v_{21}^2-v_{12}^2\right)^2\sqrt{\left(v_{12}^2-1\right)\left(v_{21}^2-4\right)}}$$

$$E_{12} = -Z_0^2E_{10}$$

$$\boxed{\text{MODE } TM_{11}}$$

$$E_{13} = \frac{u_{01}^2}{u_{11}^2}E_7$$

$$H_{13} = -\frac{v_{21}^2}{u_{11}^2}E_9$$

$$K_3 = K_1$$

$$E_{14} = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{ka\,u_{21}\left(u_{21}^2+u_{11}^2\right)}{u_{11}\left(u_{21}^2-u_{11}^2\right)^2}$$

$$E_{15} = \frac{1}{Z_0}\frac{a}{R}\frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{02}\left(u_{02}^2+u_{11}^2\right)}{u_{11}\left(u_{02}^2-u_{11}^2\right)^2}$$

$$E_{16} = \frac{u_{01}^2}{u_{11}^2} E_8$$

$$H_{14} = -\frac{v_{21}^2}{u_{11}^2} E_{11}$$

$$K_4 = -Z_0 \frac{k^2a^2 - u_{11}^2}{ka}$$

$$E_{17} = Z_0 \frac{a}{R} \frac{u_{21}\left[k^2a^2(u_{11}^2 + u_{21}^2) - 2u_{11}^2 u_{21}^2\right]}{ka\, u_{11}(u_{21}^2 - u_{11}^2)^2}$$

$$E_{18} = Z_0 \frac{a}{R} \frac{\sqrt{2}\, u_{02}\left[k^2a^2(u_{02}^2 + u_{11}^2) - 2u_{02}^2 u_{11}^2\right]}{ka\, u_{11}(u_{02}^2 - u_{11}^2)^2}$$

$$\boxed{\text{MODE } TE_{31}}$$

$$H_{15} = \frac{v_{21}^2}{v_{31}^2} H_8$$

$$L_5 = \frac{1}{Z_0} \frac{k^2a^2 - v_{31}^2}{ka}$$

$$E_{19} = -\frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{3ka\, u_{21}}{v_{31}(u_{21}^2 - v_{31}^2)\sqrt{v_{31}^2 - 9}}$$

$$H_{16} = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{v_{41}\left[2k^2a^2(6v_{31}^2 + 6v_{41}^2 - v_{31}^2 v_{41}^2) - v_{31}^2 v_{41}^2(24 - v_{41}^2 - v_{31}^2)\right]}{ka\, v_{31}(v_{41}^2 - v_{31}^2)^2\sqrt{(v_{31}^2 - 9)(v_{41}^2 - 16)}}$$

$$H_{17} = \frac{v_{21}^2}{v_{31}^2} H_{11}$$

$$L_6 = L_2$$

$$E_{20} = -Z_0^2 E_{19}$$

$$H_{18} = Z_0 \frac{a}{R} \frac{2ka\, v_{41}(6v_{31}^2 + 6v_{41}^2 - v_{31}^2 v_{41}^2)}{v_{31}(v_{41}^2 - v_{31}^2)^2\sqrt{(v_{31}^2 - 9)(v_{41}^2 - 16)}}$$

MODE TM_{21}

$$H_{19} = -\frac{v_{11}^2}{u_{21}^2} E_3$$

$$E_{21} = \frac{u_0^2}{u_{21}^2} E_{14}$$

$$H_{20} = -\frac{v_{31}^2}{u_{21}^2} E_{19}$$

$$K_5 = K_1$$

$$H_{21} = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{ka\, v_{12}}{u_{21}(u_{21}^2 - v_{12}^2)\sqrt{v_{12}^2 - 1}}$$

$$E_{22} = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{ka\, u_{21}(u_{21}^2 + u_{31}^2)}{u_{21}(u_{21}^2 - u_{31}^2)^2}$$

$$H_{22} = -\frac{v_{11}^2}{u_{21}^2} E_6$$

$$E_{23} = \frac{u_{11}^2}{u_{21}^2} E_{17}$$

$$H_{23} = -\frac{v_{31}^2}{u_{21}^2} E_{20}$$

$$K_6 = -Z_0 \frac{k^2a^2 - u_{21}^2}{ka}$$

$$H_{24} = -Z_0^2 H_{21}$$

$$E_{24} = Z_0 \frac{a}{R} \frac{u_{21}\left[k^2a^2(u_{21}^2 + u_{31}^2) - 2u_{31}^2 u_{21}^2\right]}{ka\, u_{21}(u_{21}^2 - u_{31}^2)^2}$$

MODE TE_{41}

$$H_{25} = \frac{v_{31}^2}{v_{41}^2} H_{16} \qquad\qquad H_{26} = \frac{v_{31}^2}{v_{41}^2} H_{18}$$

$$L_7 = \frac{1}{Z_0} \frac{k^2a^2 - v_{41}^2}{ka} \qquad\qquad L_8 = L_2$$

$$E_{25} = \frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{4ka\,u_{31}}{v_{41}\left(v_{41}^2 - u_{31}^2\right)\sqrt{v_{41}^2 - 16}} \qquad\qquad E_{26} = -Z_0^2 E_{25}$$

MODE TE_{12}

$$E_{28} = -\frac{u_{01}^2}{v_{12}^2} H_4 \qquad\qquad E_{31} = -\frac{u_{01}^2}{v_{12}^2} H_6$$

$$H_{27} = \frac{v_{21}^2}{v_{12}^2} H_9 \qquad\qquad H_{28} = \frac{v_{21}^2}{v_{12}^2} H_{12}$$

$$E_{27} = -\frac{u_{21}^2}{v_{12}^2} H_{21} \qquad\qquad E_{30} = -\frac{u_{21}^2}{v_{12}^2} H_{24}$$

$$L_9 = \frac{1}{Z_0} \frac{k^2a^2 - v_{12}^2}{ka} \qquad\qquad L_{10} = L_2$$

$$E_{29} = -\frac{1}{Z_0} \frac{a}{R} \frac{\sqrt{2}\,ka\,u_{02}}{v_{12}\left(u_{02}^2 - v_{12}^2\right)\sqrt{v_{12}^2 - 1}} \qquad\qquad E_{32} = -Z_0^2 E_{29}$$

MODE TM_{02}

$$H_{29} = -\frac{v_{11}^2}{u_{02}^2} E_2 \qquad H_{31} = -\frac{v_{11}^2}{u_{02}^2} E_5$$

$$E_{33} = \frac{u_{11}^2}{u_{02}^2} E_{15} \qquad E_{34} = \frac{u_{11}^2}{u_{02}^2} E_{18}$$

$$H_{30} = -\frac{v_{12}^2}{u_{02}^2} E_{29} \qquad H_{32} = -\frac{v_{12}^2}{u_{02}^2} E_{32}$$

$$K_7 = K_1 \qquad K_8 = -Z_0 \frac{k^2a^2 - u_{02}^2}{ka}$$

MODE TM_{31}

$$H_{33} = -\frac{v_{21}^2}{u_{31}^2} E_{10} \qquad H_{35} = -\frac{v_{21}^2}{u_{31}^2} E_{12}$$

$$E_{35} = \frac{u_{21}^2}{u_{31}^2} E_{22} \qquad E_{36} = \frac{u_{21}^2}{u_{31}^2} E_{24}$$

$$H_{34} = -\frac{v_{41}^2}{u_{31}^2} E_{25} \qquad H_{36} = -\frac{v_{41}^2}{u_{31}^2} E_{26}$$

$$K_9 = K_1 \qquad K_{10} = -Z_0 \frac{k^2a^2 - u_{31}^2}{ka}$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) ANDREASEN, M.G. : "Synthese eines geboyenen Hohlleiters mit steligem verlauf der krümmung" A.E.U.,12, pp. 463-471 6 juin 1958.

(2) ANDREASEN, M.G. : " Ausbreitung von Grundwellen in Kreisrunden und quadratischen gebogenen Hohlleitern Konstanter Krümmung" A.E.U., 12, pp. 414-418, 6 juin 1958.

(3) COMTE,G. PONTHUS,A.: " Etude expérimentale et premiers résultats de mesure de l'affaiblissement de l'onde TE_{01} (ou H_{01}) sur des courtes longueurs de guides d'ondes circulaires droits " Câbles et transmis., Fr. (oct. 1952),6, n°4, pp. 333-352 (hors commerce).

(4) COMTE,G. PARIS,J.M. : " Etude expérimentale des guides d'ondes circulaires utilisant l'onde TE_{01} au voisinage de 25000 Mc/S" Câbles et transmis., Fr. (oct. 1954), 8, n°4 pp. 311-324.

(5) COMTE,G.,CARFORT,F., PONTHUS,A., PARIS,J.M. : " Utilisation de guides d'ondes circulaires pour la transmission à grande distance d'ondes centimétriques et millimétriques" Câbles et transmis. Fr. (oct. 1957), 11, n°4, pp. 342-355 (hors commerce).

(6) JOUGUET,M.: " Propagation dans les tuyaux courbés" C.R.A.S. Paris, Feb. 18, 1946, Mars 4, 1946, Janv. 1947.

(7) JOUGUET,M.: " Les effets de la courbure sur la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides à section circulaire" Câbles et transmis., Fr. (juil. 1947),1,n°2, pp. 133-155.

(8) LEWIN,L.: " Theory of waveguides" Newnes - Butterworths 1975, pp. 102-108.

(9) LEWIN,L.,CHANG,D.C.,KUESTER, E.F. : "Electromagnetic waves and curved structures" IEE Electromagnetic waves serie 2, Peter Peregrinus LTD 1977

(10) BRAYER,M., YHUEL, J : "Etude en courbure des guides d'ondes à grande distance, cas des guides métalliques" Annales des Télécom. Sept. Oct. 1972, pp. 363-392

(11) COTTE,M.: "Effet d'une pellicule isolante sur l'affaiblissement du mode TE_{01} dans un guide d'onde circulaire", Câbles et Trans. Fr. (oct. 1954), 8, n°4, pp. 357-3611.

(12) ZEPP,G., WICK,A., FABRE,G. : "Influence de la courbure dans les guides d'ondes supraconducteurs à section circulaire" Canadian Journal of Physics, vol. 55, n°18, pp. 1551-1560, 1977.

(13) UNGER, H.G. : " Helix waveguide theory and applications" Bell Syst. tech. J. U.S.A. (nov. 1958), 37, n°6,pp.1599-1647.

(14) UNGER, H.G.: "Normal modes and mode conversion in helix waveguide" Bell Syst. tech. J., U.S.A. (janv. 1961),40,n°1, p.255-280

(15) COMTE,G. : "Guides d'ondes circulaires anisotropes et guides d'ondes hélicoïdaux pour la transmission du mode TE_{01}", Onde électr. Fr. (janv. 1964) 44, n°442, pp. 36-46.

(16) COMTE,G. : "Propagation des ondes électromagnétiques dans un guide d'ondes circulaire formé d'anneaux", Câbles et transmis. Fr. (janv. 1970), 24, n°1, pp. 73-95.

(17) MARCUSE, D.: "Attenuation of the TE_{01} wave within curved helix waveguide" Bell Syst. Tech. J., U.S.A. (nov. 1958), 37, n°6, pp.1649-1662

(18) COMTE,G.,TREZEGUET, J.P. : "Franchissement des courbes par le mode TE_{01} dans les guides d'ondes circulaires", Câbles et Transm. Fr. (Avr. 1972), 26, n°2, pp. 166-182.

(19) UNGER, H.G. : "Winding tolerances in helix waveguide", Bell Syst. Tech; J., U.S.A. (mars 1961), 40, n°2, pp. 627-643.

(20) UNGER, H.G : "Non cylindrical helix waveguide" Bell Syst. Tech. J. U.S.A. (janv. 1961), 40, N°1 pp. 233-254.

(21) UNGER, H.G. : "Mode conversion in metallic and helix waveguides" Bell Syst. Tech. J. U.S.A. (mars 1961),40,n°2, pp. 613-626.

(22) VAN BLADEL,J : "Electromagnetic fields" Mac Graw-Hill Elec. and Eng. series 1964.

(23) PAPIERNIK,A. cours DEA : "Communications microondes et optiques" UER des Sciences - Université de LIMOGES

(24) TANG, C.H.: "An orthogonal coordinate system for curved pipes", IEEE Trans. MTT-18 pp.69, janv. 1970.

(25) Ali HASAN NAYFEH : "Perturbation methods" John Wiley and Sons Inc. 1973, pp. 58-59

(26) RAFI, A.: "Atténuation théorique et expérimentale du mode TE_{11} du guide circulaire" D.E.A. communications microondes et optiques, UER des Sciences, Université de LIMOGES, 1980.

(27) COLLIN, R.: "Field theory of guided waves" Mc. Graw-Hill 1960 pp.182-197

(28) JOHNSON, C.C. : "Field and wave electrodynamics" Mc. Graw-Hill, 1965

(29) PEREZ, J.P. : "Mécanique Physique", Masson et Cie, 1961, pp. 10-14.

(30) GASTINEL, N. : "Analyse numérique linéaire", Collection enseignement des sciences, 1966.

(31) HACQUES, G.: " Mathématiques pour informatique", 3-algorithmique numérique (I), Armand Collin, 1971, pp. 153-154.

(32) DURAND, E.: "Solutions numériques des équations algébriques" Tome II, Masson et Cie, 1972

(33) DURAND, E. : "Solutions numériques des équations algébriques" Tome I, Masson et Cie, 1960.

(34) ZELDOVITCH, I., MYCHKIS, A.: "Eléments de mathématiques appliquées" Editions Mir - Moscou, 1974.

(35) DEMIDOVITCH, B., MARON, I.: "Eléments de calcul numérique"Editions Mir - Moscou 1973.

(36) AUBOURG, M. : "Analyse électromagnétique des lignes de microélectronique microondes par la méthode des éléments finis" Thèse de 3è cycle, décembre 1978. Faculté des Sciences de LIMOGES.

(37) PETIAU, G. : "Théorie des fonctions de Bessel" Edition du CNRS (1955).

(38) WATSON, G.N. : "A treatise on the theory of Bessel functions", Cambridge University Press (1966)

(39) ABRAMOWITZ : " Handbook of mathematical functions" National Bureau of standards Juin 1964.

Résolution d’ un système d’ équations différentielles par une méthode matricielle

par

Ioannis Andritsos

Limoges 1980

```
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX (F,G,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-E,H,O-W,Y,Z)
      DIMENSION A(20,20),TR(20),TI(20),COF(21),VPR(20),VPI(20),
     1IPER(40),VD(40),VTRAV(40),SAUV(20,20),VEP(20,40),B(40,40),
     2F(20,20),FA(20,20),FB(20,20),IL(20),IC(20),FP(20,1),X(20,1)
     3,XX(20,20)
      DOUBLE COMPLEX JI,DET
      DOUBLE PRECISION GV11,GU01,GV21,GU11,GV31,GU21,GV41,GV12,GU02,GU31
      COMMON PR,PI,Z,V11,U01,V21,U11,V31,U21,V41,V12,U02,U31,VA,UF,VB,
     1UA,UB,VE,VF,UD,UC
      ICO=0
      JI=(0.D+00,1.D+00)
      PR=3.D-02
      PI=3.1415926529
      PA=PI/PR/2.
      Z=120.*PI
      V11=1.8412
      U01=2.404825577
      V21=3.05424
      U11=3.8317059702
      V31=4.20119
      U21=5.13562
      V41=5.31755
      V12=5.33144
      U02=5.5200781103
      U31=6.38106
      VA=V11*V11
      UF=U01*U01
      VB=V21*V21
      UA=U11*U11
      UB=U21*U21
      VE=V41*V41
      VF=V12*V12
      UD=U02*U02
      UC=U31*U31
      Y0=4.06
      YD=0.02
      EPS=0.D+00
      PREC=1.D-04
      N=20
      DO 1 K=1,1
      YA=Y0+YD*K
      WRITE(108,4)YA
    4 FORMAT(1H1,42X,'FREQUENCE YA=',F4.2/42X,18('-'))
      CALL CALC(A,YA,N)
      DO 2 I=1,N
      DO 3 J=I,N
      SAUV(I,J)=A(I,J)
    3 CONTINUE
    2 CONTINUE
      CALL DDANILEV(A,N,TR,TI,COF,VPR,VPI,KOD,EPS)
      IF(KOD.NE.0) WRITE(108,6) KOD
    6 FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      WRITE(108,8)
    8 FORMAT(/////,10X,'VPR',13X,'VPI',//)
      WRITE(108,10)(VPR(I),VPI(I),I=1,N)
   10 FORMAT(1H ,2D17.8)
      DO 20 I=1,N
```

```
      IF(VPI(I).NE.0.D+00) GO TO 40
  500 CONTINUE
      DO 14 II=1,N
      DO 14 J=1,N
   14 A(II,J)=SAUV(II,J)
      CALL ITDIR(A,N,IPER,VD,VTRAV,VPR(I),PREC,NIT,ICO)
      IF(ICO.EQ.3) GO TO 500
      IF(ICO.NE.0) STOP 3
      WRITE(108,7)
    7 FORMAT(//,10X,'VPR',//)
      WRITE(108,9)(VPR(I))
    9 FORMAT(1H ,D17.8)
      DO 13 J=1,N
      VEP(I,J)=VD(J)
   13 CONTINUE
      WRITE(108,11)
   11 FORMAT(//,45X,'VECTEURS PROPRES',///)
      WRITE(108,12)(VEP(I,J),J=1,N)
   12 FORMAT(1H ,8D15.6)
      GO TO 20
   40 NN=2*N
      NITER=0
      RLAMB=0.D+00
  300 CONTINUE
      NITER=NITER+1
      IF(NITER.GT.10) WRITE(108,200)YA;GO TO 1
      DO 50 II=1,N
      L=2*II
      LL=L-1
      DO 60 J=1,N
      JJ=2*J
      B(LL,JJ)=-SAUV(II,J)
      B(L,JJ)=0.D+00
      JJ=JJ-1
      B(L,JJ)=SAUV(II,J)
      B(LL,JJ)=0.D+00
   60 CONTINUE
   50 CONTINUE
      DO 70 II=1,NN
      B(II,II)=VPI(I)
   70 CONTINUE
      CALL ITDIR(B,NN,IPER,VD,VTRAV,RLAMB,PREC,NIT,ICO)
      IF(ICO.EQ.1) RLAMB=1.D-10;GO TO 300
      IF(ICO.EQ.2) STOP 2
      IF(ICO.EQ.3) GO TO 300
      DO 80 J=1,NN
      VEP(I,J)=VD(J)
   80 CONTINUE
      WRITE(108,90)
   90 FORMAT(//,45X,'VECTEURS PROPRES',///)
      WRITE(108,100)(VEP(I,J),J=1,NN)
  100 FORMAT(1H ,8D15.6)
   20 CONTINUE
      DO 110 I=1,N
      DO 110 J=1,N
  110 F(I,J)=(0.D+00,0.D+00)
      DO 120 I=1,N
      IF(VPI(I).EQ.0.D+00) GO TO 140
```

```
      DO 130 J=1,N
      LL=2*J-1
      L=2*J
      F(I,J)=VEP(I,LL)+JI*VEP(I,L)
  130 CONTINUE
      GO TO 120
  140 DO 150 J=1,N
  150 F(I,J)=VEP(I,J)+JI*0.D+00
  120 CONTINUE
      WRITE(108,240)
  240 FORMAT(//,15X,'F(I,2)',//)
      WRITE(108,250)(F(I,2),I=1,N)
  250 FORMAT(1H ,2D15.6)
      Y=YA*YA
      GV11=Y-VA
      GVA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV11)),0.D+00)
      IF(GV11.LT.0.D+00) GVA=-JI*GVA
      GU01=Y-UF
      GUF=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU01)),0.D+00)
      IF(GU01.LT.0.D+00) GUF=-JI*GUF
      GV21=Y-VB
      GVB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV21)),0.D+00)
      IF(GV21.LT.0.D+00) GVB=-JI*GVB
      GU11=Y-UA
      GUA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU11)),0.D+00)
      IF(GU11.LT.0.D+00) GUA=-JI*GUA
      GV31=Y-V31*V31
      GVD=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV31)),0.D+00)
      IF(GV31.LT.0.D+00) GVD=-JI*GVD
      GU21=Y-UB
      GUB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU21)),0.D+00)
      IF(GU21.LT.0.D+00) GUB=-JI*GUB
      GV41=Y-VE
      GVE=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV41)),0.D+00)
      IF(GV41.LT.0.D+00) GVE=-JI*GVE
      GV12=Y-VF
      GVF=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV12)),0.D+00)
      IF(GV12.LT.0.D+00) GVF=-JI*GVF
      GU02=Y-UD
      GUD=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU02)),0.D+00)
      IF(GU02.LT.0.D+00) GUD=-JI*GUD
      GU31=Y-UC
      GUC=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU31)),0.D+00)
      IF(GU31.LT.0.D+00) GUC=-JI*GUC
      WRITE(108,310)
  310 FORMAT(//,18X,'FC',//)
      DO 160 I=1,N
      IF(VPI(I).LT.0.D+00) GO TO 260
      FC=CDEXP(JI*(VPR(I)+JI*VPI(I))*PA)
      IF(DABS(DREAL(FC)).LT.1.D-15) FC=(0.D+00,0.D+00)
      FA(1,I)=F(I,2)-Z*YA/GVA*F(I,1)
      FA(2,I)=(F(I,2)+Z*YA/GVA*F(I,1))*FC
      FA(3,I)=F(I,4)+Z*GUF/YA*F(I,3)
      FA(4,I)=(F(I,4)-Z*GUF/YA*F(I,3))*FC
      FA(5,I)=F(I,6)-Z*YA/GVB*F(I,5)
      FA(6,I)=(F(I,6)+Z*YA/GVB*F(I,5))*FC
      FA(7,I)=F(I,8)+Z*GUA/YA*F(I,7)
      FA(8,I)=(F(I,8)-Z*GUA/YA*F(I,7))*FC
```

```
      FA(9,I)=F(I,10)-Z*YA/GVD*F(I,9)
      FA(10,I)=(F(I,10)+Z*YA/GVD*F(I,9))*FC
      FA(11,I)=F(I,12)+Z*GUB/YA*F(I,11)
      FA(12,I)=(F(I,12)-Z*GUB/YA*F(I,11))*FC
      FA(13,I)=F(I,14)-Z*YA/GVE*F(I,13)
      FA(14,I)=(F(I,14)+Z*YA/GVE*F(I,13))*FC
      FA(15,I)=F(I,16)-Z*YA/GVF*F(I,15)
      FA(16,I)=(F(I,16)+Z*YA/GVF*F(I,15))*FC
      FA(17,I)=F(I,18)+Z*GUD/YA*F(I,17)
      FA(18,I)=(F(I,18)-Z*GUD/YA*F(I,17))*FC
      FA(19,I)=F(I,20)+Z*GUC/YA*F(I,19)
      FA(20,I)=(F(I,20)-Z*GUC/YA*F(I,19))*FC
      GO TO 330
260   FC=CDEXP(JI*(VPR(I)-JI*VPI(I))*PA)
      IF(DABS(DREAL(FC)).LT.1.D-15) FC=(0.D+00,0.D+00)
      FA(1,I)=(F(I,2)-Z*YA/GVA*F(I,1))*FC
      FA(2,I)=F(I,2)+Z*YA/GVA*F(I,1)
      FA(3,I)=(F(I,4)+Z*GUF/YA*F(I,3))*FC
      FA(4,I)=F(I,4)-Z*GUF/YA*F(I,3)
      FA(5,I)=(F(I,6)-Z*YA/GVB*F(I,5))*FC
      FA(6,I)=F(I,6)+Z*YA/GVB*F(I,5)
      FA(7,I)=(F(I,8)+Z*GUA/YA*F(I,7))*FC
      FA(8,I)=F(I,8)-Z*GUA/YA*F(I,7)
      FA(9,I)=(F(I,10)-Z*YA/GVD*F(I,9))*FC
      FA(10,I)=F(I,10)+Z*YA/GVD*F(I,9)
      FA(11,I)=(F(I,12)+Z*GUB/YA*F(I,11))*FC
      FA(12,I)=F(I,12)-Z*GUB/YA*F(I,11)
      FA(13,I)=(F(I,14)-Z*YA/GVE*F(I,13))*FC
      FA(14,I)=F(I,14)+Z*YA/GVE*F(I,13)
      FA(15,I)=(F(I,16)-Z*YA/GVF*F(I,15))*FC
      FA(16,I)=F(I,16)+Z*YA/GVF*F(I,15)
      FA(17,I)=(F(I,18)+Z*GUD/YA*F(I,17))*FC
      FA(18,I)=F(I,18)-Z*GUD/YA*F(I,17)
      FA(19,I)=(F(I,20)+Z*GUC/YA*F(I,19))*FC
      FA(20,I)=F(I,20)-Z*GUC/YA*F(I,19)
330   CONTINUE
      WRITE(108,320)FC
320   FORMAT(1H ,2D17.8)
160   CONTINUE
      WRITE(108,340)
340   FORMAT(//,45X,'MATRICE FA(I,J)',//)
      DO 350 I=1,N
      WRITE(108,360)(FA(I,J),J=1,N)
360   FORMAT(/,1H0,8D15.6,/(1H ,8D15.6))
350   CONTINUE
      EPSP=1.D-15
      CALL DMRINV(FA,FB,N,KOD,DET,EPSP,IL,IC)
      IF(KOD.NE.0) WRITE(108,170) KOD
170   FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      WRITE(108,370)
370   FORMAT(//,40X,'MATRICE INVERSE FB(I,J)',//)
      DO 380 I=1,N
      WRITE(108,390)(FB(I,J),J=1,N)
390   FORMAT(/,1H0,8D15.6,/(1H ,8D15.6))
380   CONTINUE
      CALL PRD(FB,FA,XX,N,N,N)
      WRITE(108,600)
600   FORMAT(//,50X,'MATRICE UNITAIRE',//)
```

```
      DO 700 I=1,N
      WRITE(108,800)(XX(I,J),J=1,N)
  800 FORMAT(/,1H0,8D15.6,/(1H ,8D15.6))
  700 CONTINUE
      DO 210 I=1,N
  210 FP(I,1)=(0.D+00,0.D+00)
      FP(1,1)=2.D+00+JI*0.D+00
      CALL PRD(FB,FP,X,N,N,1)
      WRITE(108,220)
  220 FORMAT(//,50X,'SOLUTION X',//)
      WRITE(108,230)(X(I,1),I=1,N)
  230 FORMAT(1H ,2D17.8)
      FBA=(0.D+00,0.D+00)
      FBB=(0.D+00,0.D+00)
      DO 180 I=1,N
      IF(VPI(I).LT.0.D+00) GO TO 270
      FC=CDEXP(JI*(VPR(I)+JI*VPI(I))*PA)
      FBS=F(I,2)*X(I,1)*FC
      FBE=F(I,2)*X(I,1)
      GO TO 280
  270 FC=CDEXP(JI*(VPR(I)-JI*VPI(I))*PA)
      FBS=F(I,2)*X(I,1)
      FBE=F(I,2)*X(I,1)*FC
  280 FBA=FBA+FBS
      FBB=FBB+FBE
  180 CONTINUE
      BS=CDABS(FBA)
      FBC=FBB-1.D+00
      BE=CDABS(FBC)
      ES=BS*BS
      EE=BE*BE
      PH=DATAN(DIMAG(FBA)/DREAL(FBA))
      WRITE(108,190)
  190 FORMAT(//,10X,'YA',14X,'VPR',14X,'BS',16X,'ES',16X,'BE',16X,
     1'EE',16X,'PH',//)
      WRITE(108,200)(YA,VPR(20),BS,ES,BE,EE,PH)
  200 FORMAT(1H ,7D17.8)
    1 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE CALC(A,YA,N)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N,N)
      COMMON PR,PI,Z,V11,U01,V21,U11,V31,U21,V41,V12,U02,U31,VA,UF,VB,
     1UA,UB,VE,VF,UD,UC
      DATA ZERO/0.D+00/
      DO 2 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      A(I,J)=ZERO
    1 CONTINUE
    2 CONTINUE
      VD=V31*V31
      Y=YA*YA

                         MODE TE11

      A(1,2)=(Y-VA)/(Z*YA)
      A(1,4)=-PR*DSQRT(2.)*YA*U01/(Z*V11*(UF-VA)*DSQRT(VA-1.))
      A(1,6)=PR*V21*(2.*Y*(VA+VB-VA*VB)-VA*VB*(4.-VA-VB))/
     1(Z*YA*V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(1,12)=-PR*YA*U21/(Z*V11*(UB-VA)*DSQRT(VA-1.))
      A(1,18)=-PR*DSQRT(2.)*YA*U02/(Z*V11*(UD-V11)*DSQRT(VA-1.))
      A(2,1)=Z*YA
      A(2,3)=-Z**2.*A(1,4)
      A(2,5)=Z*PR*2.*YA*V21*(VA+VB-VA*VB)/
     1(V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(2,11)=-Z**2.*A(1,12)
      A(2,17)=-Z**2.*A(1,18)

                         MODE TM01

      A(3,2)=-VA/UF*A(1,4)
      A(3,4)=-YA/Z
      A(3,8)=PR*DSQRT(2.)*U11*YA*(UF+UA)/(Z*U01*(UF-UA)**2.)
      A(3,16)=PR*DSQRT(2.)*YA*V12/(Z*U01*(UF-VF)*DSQRT(VF-1.))
      A(4,1)=-Z**2.*A(3,2)
      A(4,3)=-Z*(Y-UF)/YA
      A(4,7)=Z*PR*DSQRT(2.)*U11*(Y*(UF+UA)-2.*UF*UA)/
     1(U01*YA*(UF-UA)**2.)
      A(4,15)=-Z**2.*A(3,16)

                         MODE TE21

      A(5,2)=VA/VB*A(1,6)
      A(5,6)=(Y-VB)/(Z*YA)
      A(5,8)=PR*2.*YA*U11/(Z*U21*(VB-UA)*DSQRT(VB-4.))
      A(5,10)=PR*V31*(2.*Y*(3.*VD+3.*VB-VB*VD)-VB*VD*(12.-VD-VB))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(5,16)=PR*V12*(2.*Y*(VF+VB-VB*VF)-VB*VF*(4.-VB-VF))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VF)**2.*DSQRT((VF-1.)*(VB-4.)))
      A(5,20)=PR*2.*YA*U31/(Z*V21*(VB-UC)*DSQRT(VB-4.))
      A(6,1)=VA/VB*A(2,5)
      A(6,5)=A(2,1)
      A(6,7)=-Z**2.*A(5,8)
      A(6,9)=Z*PR*2.*V31*YA*(3.*VD+3.*VB-VB*VD)/
     1(V21*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(6,15)=Z*PR*2.*V12*YA*(VF+VB-VB*VF)/
     1(V21*(VB-VF)**2.*DSQRT((VF-1.)*(VB-4.)))
```

```
      A(6,19)=-Z**2.*A(5,20)

                    MODE TM11

      A(7,4)=UF/UA*A(3,8)
      A(7,6)=-VB/UA*A(5,8)
      A(7,8)=A(3,4)
      A(7,12)=PR*YA*U21*(UB+UA)/(Z*U11*(UB-UA)**2.)
      A(7,18)=PR*DSQRT(2.)*YA*U02*(UD+UA)/(Z*U11*(UD-UA)**2.)
      A(8,3)=UF/UA*A(4,7)
      A(8,5)=-VB/UA*A(6,7)
      A(8,7)=-Z*(Y-UA)/YA
      A(8,11)=Z*PR*U21*(Y*(UA+UB)-2.*UA*UB)/(U11*YA*(UB-UA)**2.)
      A(8,17)=Z*PR*DSQRT(2.)*U02*(Y*(UD+UA)-2.*UD*UA)/
     1(U11*YA*(UD-UA)**2.)

                    MODE TE31

      A(9,6)=VB/VD*A(5,10)
      A(9,10)=(Y-VD)/(Z*YA)
      A(9,12)=-PR*3.*YA*U21/(Z*V31*(UB-VD)*DSQRT(VD-9.))
      A(9,14)=PR*V41*(2.*Y*(6.*VD+6.*VE-VE*VD)-VE*VD*(24.-VE-VD))/
     1(Z*V31*YA*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))
      A(10,5)=VB/VD*A(6,9)
      A(10,9)=A(2,1)
      A(10,11)=-Z**2.*A(9,12)
      A(10,13)=Z*PR*2.*V41*YA*(6.*VD+6.*VE-VE*VD)/
     1(V31*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))

                    MODE TM21

      A(11,2)=-VA/UB*A(1,12)
      A(11,8)=UA/UB*A(7,12)
      A(11,10)=-VD/UB*A(9,12)
      A(11,12)=A(3,4)
      A(11,16)=PR*YA*V12/(Z*U21*(UB-VF)*DSQRT(VF-1.))
      A(11,20)=PR*U31*YA*(UB+UC)/(Z*U21*(UB-UC)**2.)
      A(12,1)=-VA/UB*A(2,11)
      A(12,7)=UA/UB*A(8,11)
      A(12,9)=-VD/UB*A(10,11)
      A(12,11)=-Z*(Y-UB)/YA
      A(12,15)=-Z**2.*A(11,16)
      A(12,19)=Z*PR*U31*(Y*(UB+UC)-2.*UC*UB)/(U21*YA*(UB-UC)**2.)

                    MODE TE41

      A(13,10)=VD/VE*A(9,14)
      A(13,14)=(Y-VE)/(Z*YA)
      A(13,20)=PR*4.*YA*U31/(Z*V41*(VE-UC)*DSQRT(VE-16.))
      A(14,9)=VD/VE*A(10,13)
      A(14,13)=A(2,1)
      A(14,19)=-Z**2.*A(13,20)

                    MODE TE12

      A(15,4)=-UF/VF*A(3,16)
      A(15,6)=VB/VF*A(5,16)
      A(15,12)=-UB/VF*A(11,16)
```

```
A(15,16)=(Y-VF)/(Z*YA)
A(15,18)=-PR*DSQRT(2.)*YA*U02/(Z*V12*(UD-VF)*DSQRT(VF-1.))
A(16,3)=-UF/VF*A(4,15)
A(16,5)=VB/VF*A(6,15)
A(16,11)=-UB/VF*A(12,15)
A(16,15)=A(2,1)
A(16,17)=-Z**2.*A(15,18)

                    MODE TM02

A(17,2)=-VA/UD*A(1,18)
A(17,8)=UA/UD*A(7,18)
A(17,16)=-VF/UD*A(15,18)
A(17,18)=A(3,4)
A(18,1)=-VA/UD*A(2,17)
A(18,7)=UA/UD*A(8,17)
A(18,15)=-VF/UD*A(16,17)
A(18,17)=-Z*(Y-UD)/YA

                    MODE TM31

A(19,6)=-VB/UC*A(5,20)
A(19,12)=UB/UC*A(11,20)
A(19,14)=-VE/UC*A(13,20)
A(19,20)=A(3,4)
A(20,5)=-VB/UC*A(6,19)
A(20,11)=UB/UC*A(12,19)
A(20,13)=-VE/UC*A(14,19)
A(20,19)=-Z*(Y-UC)/YA
RETURN
END
```

```
      SUBROUTINE ITDIR(A,N2,IPER,VD,VTRAV,RLAMB,PREC,NIT,ICO)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N2,N2),IPER(N2),VD(N2),VTRAV(N2)
      DATA ZERO,UN/0.D+00,1.D+00/
C
C     CALCUL DU VECTEUR PROPRE VD DE LA MATRICE DIRECTE
C     PAR LA PUISSANCE ITEREE
C     ICO=2 VECTEUR NUL
C     ICO=3 NON CONVERGENCE
C
C     INITIALISATION DE VTRAV
C
      IF(ICO.EQ.3) GO TO 13
      DO 1 I=1,N2
      VTRAV(I)=UN
      VD(I)=UN
1     CONTINUE
C
C     CALCUL DE A-RLAMB*I
C
13    IF(RLAMB.EQ.ZERO) GO TO 12
      DO 11 I=1,N2
      A(I,I)=A(I,I)-RLAMB
11    CONTINUE
C
C     TRIANGULARISATION
C
12    CALL TGAUSS(A,N2,IPER,ICO)
      IF(ICO.EQ.1) RETURN
C
C     DEBUT DES ITERATIONS
C
      NIT=0
      N1=N2-1
2     NIT=NIT+1
      IF(NIT.LE.10) GO TO 3
      ICO=3
      GO TO 10
3     DO 6 I=1,N1
C
C     PERMUTATIONS
C
      J=IPER(I)
      X=VTRAV(J)
      IF(J.EQ.I) GO TO 4
      VTRAV(J)=VTRAV(I)
      VTRAV(I)=X
4     IF(X.EQ.0.D+00) GO TO 6
C
C     COMBINAISONS LINEAIRES
C
      M=I+1
      DO 5 J=M,N2
      VTRAV(J)=VTRAV(J)+A(J,I)*X
5     CONTINUE
6     CONTINUE
C
C     SYSTEME TRIANGULAIRE
```

```
C
      VTRAV(N2)=VTRAV(N2)/A(N2,N2)
      I=N2
7     M=I
      I=I-1
      IF(I.LE.0) GO TO 9
      X=VTRAV(I)
      DO 8 J=M,N2
      X=X-A(I,J)*VTRAV(J)
8     CONTINUE
      VTRAV(I)=X/A(I,I)
      GO TO 7
C
C     NORMALISATION DE VTRAV
C     COMPARAISON DE VTRAV ET VD
C
9     CALL COMP(VTRAV,VD,N2,X,PREC1,ICO)
      IF(ICO.EQ.2) RETURN
      IF(PREC1.GE.PREC) GO TO 2
      ICO=0
10    RLAMB=RLAMB+X
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TGAUSS(A,N2,IPER,ICO)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N2,N2),IPER(N2)
C
C     TRIANGULARISATION DE LA MATRICE REELLA A PAR GAUSS
C     IPER VECTEUR DE PERMUTATION DES LIGNES
C     ICO=1 MATRICE SINGULIERE
C
      N1=N2-1
C
C     BOUCLE SUR LES PIVOTS
C
      DO 8 K=1,N1
C
C     RECHERCHE DU PLUS GRAND PIVOT
C
      X=0.D+00
      DO 1 I=K,N2
      Y=DABS(A(I,K))
      IF(Y.LE.X) GO TO 1
      X=Y
      IPER(K)=I
    1 CONTINUE
      IF(X.GT.0.D+00) GO TO 3
    2 ICO=1
      RETURN
    3 IF(IPER(K).EQ.K) GO TO 5
C
C     PERMUTATION DES LIGNES K ET IPER(K)
C
      I=IPER(K)
      DO 4 J=K,N2
      X=A(K,J)
      A(K,J)=A(I,J)
      A(I,J)=X
    4 CONTINUE
C
C     TRANSFORMATION DES LIGNES K+1 A N2
C
    5 L=K+1
      DO 7 I=L,N2
      IF(A(I,K).EQ.0.D+00) GO TO 7
      X=-A(I,K)/A(K,K)
      A(I,K)=X
      DO 6 J=L,N2
      A(I,J)=A(I,J)+X*A(K,J)
    6 CONTINUE
    7 CONTINUE
    8 CONTINUE
      IF(A(N2,N2).EQ.0.D+00) GO TO 2
      ICO=0
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE COMP(VTRAV,V,N2,X,PREC1,ICO)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION VTRAV(N2),V(N2)
C
C     NORMALISATION DE VTRAV
C     COMPARAISON DE VTRAV ET V
C
      X=0.D+00
      DO 1 I=1,N2
      PREC1=DABS(VTRAV(I))
      IF(PREC1.LE.X) GO TO 1
      M=I
      X=PREC1
    1 CONTINUE
      IF(X.GT.0.D+00) GO TO 2
      ICO=2
      RETURN
    2 X=1.D+00/VTRAV(M)
      PREC1=0.D+00
      DO 3 I=1,N2
      VTRAV(I)=VTRAV(I)*X
      V(I)=V(I)-VTRAV(I)
      IF(VTRAV(I).NE.0.D+00) V(I)=V(I)/VTRAV(I)
      V(I)=DABS(V(I))
      IF(V(I).GT.PREC1) PREC1=V(I)
      V(I)=VTRAV(I)
    3 CONTINUE
      ICO=0
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DMRINV(A,B,N,KOD,DET,EPS,IL,IC)
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(400),B(400),IL(N),IC(N)
      DOUBLE PRECISION EPS

      1. A: TABLEAU DANS LEQUEL ON RANGE LA MATRICE INITIALE EN
      COLONNES, LA MATRICE A N'EST PAS DETRUITE SI A ET B N'ONT PAS
      LA MEME IMPLANTATION EN MEMOIRE. SI N EST LA DIMENSION DE LA
      MATRICE, LA DIMENSION DE CE TABLEAU EST N*N.
      2. B: TABLEAU CONTENANT LA MATRICE INVERSE DE A. SI L'ON NE
      DESIRE PAS GARDER LA MATRICE INITIALE EN MEMOIRE, ON PEUT
      ECRIRE CALL DMRINV(A,A,N,KOD,DET,EPS,IL,IC) POUR AVOIR LE RESULTAT
      RANGE DANS A.
      3. N: DIMENSION DE LA MATRICE A ET DE SON INVERSE B.
      4. DET: VALEUR DU DETERMINANT DE LA MATRICE A.
      5. KOD: CODE D'ERREUR.
          KOD = 0 : SOLUTION NORMALE
          KOD = 1 : MATRICE SINGULIERE
      6. EPS: SEUIL AU-DESSOUS DUQUEL UN PIVOT EST CONSIDERE COMME
      NUL.
      7. IL: TABLEAU DE TRAVAIL DE DIMENSION N A RESERVER DANS LE
      PROGRAMME APPELANT.
      8. IC: TABLEAU DE TRAVAIL DE DIMENSION N A RESERVER DANS LE
      PROGRAMME APPELANT.

      KOD=0
      NN=N*N
      DO 1 I=1,NN
    1 B(I)=A(I)
          RECHERCHE DE PIVOT MAXIMUM
      DET=(1.,0.)
      NM=-N
      DO 11 M=1,N
      NM=NM+N
      IL(M)=M
      IC(M)=M
      ID=NM+M
      PIVO=B(ID)
      DO 2 J=M,N
      JJ=J*N-N
      DO 2 I=M,N
      II=JJ+I
      IF(CDABS(PIVO).GE.CDABS(B(II))) GO TO 2
      PIVO=B(II)
      IL(M)=I
      IC(M)=J
    2 CONTINUE
          PERMUTATIONS LIGNES ET COLONNES
      I=IL(M)
      IF(I.LE.M) GOTO 4
      IM=M-N
      DO 3 J=1,N
      IM=IM+N
      JJ=IM-M+I
      X=-B(IM)
      B(IM)=B(JJ)
    3 B(JJ)=X
    4 J=IC(M)
```

```
      IF(J.LE.M) GOTO 6
      NJ=N*J-N
      DO 5 I=1,N
      JM=NM+I
      JJ=NJ+I
      X=-B(JM)
      B(JM)=B(JJ)
    5 B(JJ)=X
C            MODIFICATION EN COLONNE
6     IF(CDABS(PIVO).GT.EPS) GO TO 7
      DET=(0.,0.)
      KOD=1
      RETURN
    7 DO 8 L=1,N
      IF(L.EQ.M) GO TO 8
      LL=NM+L
      B(LL)=-B(LL)/PIVO
    8 CONTINUE
C            ALGORITHME DE GAUSS
      DO 9 I=1,N
      IM=NM+I
      II=I-N
      DO 9 J=1,N
      II=II+N
      IF(I.EQ.M) GOTO 9
      IF(J.EQ.M) GOTO 9
      JJ=II-I+M
      B(II)=B(II)+B(IM)*B(JJ)
    9 CONTINUE
C            MODIFICATION EN LIGNE
      MJ=M-N
      DO 10 J=1,N
      MJ=MJ+N
      IF (J.EQ.M) GOTO 10
      B(MJ)=B(MJ)/PIVO
   10 CONTINUE
C            CALCUL DU DETERMINANT
      DET=DET*PIVO
C            MODIFICATION DU PIVOT
      B(ID)=(1.,0.)/PIVO
   11 CONTINUE
C            PERMUTATIONS SUR LA MATRICE RESULTANTE
      M=N
   12 M=M-1
      IF(M.LE.0) GOTO 16
      I=IL(M)
      IF(I.LE.M) GOTO 14
      J1=N*(M-1)
      J2=N*(I-1)
      DO 13 J=1,N
      JX=J1+J
      JY=J2+J
      X=B(JX)
      B(JX)=-B(JY)
   13 B(JY)=X
   14 J=IC(M)
      IF(J.LE.M) GO TO 12
      J1=M-N
```

```
      DO 15 I=1,N
      J1=J1+N
      J2=J1-M+J
      X=B(J1)
      B(J1)=-B(J2)
   15 B(J2)=X
      GOTO 12
   16 CONTINUE
      RETURN
      END


      SUBROUTINE PRD(S,FP,FT,NE,ME,LE)
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX(A-H,O-Z)
      DIMENSION S(NE,ME),FP(ME,LE),FT(NE,LE)
      DATA ZEROC/(0.D+00,0.D+00)/
      DO 3 I=1,NE
      DO 2 J=1,LE
      FT(I,J)=ZEROC
      DO 1 K=1,ME
      FT(I,J)=FT(I,J)+S(I,K)*FP(K,J)
1     CONTINUE
2     CONTINUE
3     CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
CALCUL DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE REELLE QUELCONQUE
PAR LA METHODE DE DANILEVSKI

VERSION DOUBLE PRECISION

SUBROUTINE DDANILEV(A,N,TR,TI,COF,VPR,VPI,KOD,EPS)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(400),TR(20),TI(20),COF(21),VPR(20),VPI(20)

A  :TABLEAU MONODIMENSIONNE DE TAILLE N*N CONTENANT LA MATRICE
    DONNEE RANGEE PAR COLONNES (CE TABLEAU EST DETRUIT)
N  :ORDRE DE LA MATRICE A
TR ET TI :DEUX TABLEAUX DE TRAVAIL DE TAILLE N
COF:TABLEAU DE TAILLE N+1 CONTENANT LES COEFFICIENTS DU POLYNOME
    CARACTERISTIQUE DE A (CE TABLEAU EST DETRUIT)
VPR:TABLEAU DE TAILLE N CONTENANT LES PARTIES REELLES DES VALEURS
    PROPRES DE A CLASSEES PAR ORDRE CROISSANT
VPI:TABLEAU DE TAILLE N CONTENANT LES PARTIES IMAGINAIRES CORRESP.
KOD:CODE D'ERREUR :
    KOD=0 DEROULEMENT NORMAL
    KOD=1 UNE VAL.PROPRE NE PEUT ETRE OBTENUE APRES 100 ITERATIONS
          ET DEUX VALEURS DE DEPART DIFFERENTES , LE PROGRAMME
          S'ARRETE (CF DPORAB)
    KOD=2 N EST INFERIEUR A 2 OU SUPERIEUR A 40
EPS:SEUIL AU DESSOUS DUQUEL UN PIVOT EST CONSIDERE COMME NUL

CE MODULE UTILISE LE SOUS-PROGRAMME DPORAB DE LA BIB. MATHEMATIQUE

   KOD=2
   IF((N.LT.2).OR.(N.GT.40)) RETURN
   N2=N
   N1=N
 1 NM1=N2-1
   DO 18 I=1,NM1
   NI1=N2-I
   NI=NI1+1
   NN1=NI1-1
   NNN=N2*NN1

   CHOIX DU PLUS GRAND PIVOT

   IF(I.EQ.1) GO TO 23
   EMAX0=EMAX
23 IK1=0
   IK2=0
   EMAX=0.
   DO 5 K=1,NI1
   N2K=N2*(K-1)
   NIK=NI+N2K
   IF(DABS(A(NIK)).LE.EPS) GO TO 5
   IF(DABS(A(NIK)).LE.EMAX) GO TO 5
   EMAX=DABS(A(NIK))
   IK1=K
   IK2=N2K
 5 CONTINUE
   IF(IK1.EQ.0) GO TO 6
   PP=EMAX
```

```
      IF(I.EQ.1) GO TO 25
      IF(EMAX0.GT.EMAX) GO TO 24
      PP=EMAX0/EMAX
      GO TO 25
   24 PP=EMAX/EMAX0
   25 IF(IK1.EQ.NI1) GO TO 26
      V=DABS(A(NI+NNN))
      IF(DABS(EMAX-V).LE.EPS) GO TO 26
      DO 3 II=1,N2
      IIN=II+NNN
    3 A(IIN)=A(IIN)+A(II+IK2)
      DO 4 JJ=1,N2
      KJJ=IK1+N2*(JJ-1)
    4 A(KJJ)=A(KJJ)-A(NI1+N2*(JJ-1))
   26 IF(PP.GT.EPS) GO TO 11

      CAS OU TOUS LES PIVOTS POSSIBLES SONT NULS (DANS CE CAS LE
      POLYNOME CARACTERISTIQUE EST EGAL (AU SIGNE PRES) AU PRODUIT DU
      DETERMINANT EN HAUT ET A GAUCHE PAR LE DETERMINANT EN BAS ET A
      DROITE QUI A DEJA LA FORME DE FROBENIUS)

    6 IF(NN1.NE.0) GO TO 2
      VPR(1)=A(1)
      VPI(1)=0.
    2 N1=NI1
      DO 7 J=1,N1
      DO 7 K=1,N1
      K1=K+N1*(J-1)
      K2=K+N2*(J-1)
    7 A(K1)=A(K2)
      IF((N2-N1).NE.1) GO TO 8

      CAS OU LE DETERMINANT DE DROITE EST D'ORDRE 1

      VPR(N2)=A(N2*N2)
      VPI(N2)=0.
      IF(NN1.EQ.0) GO TO 22
      N2=N1
      GO TO 1

      CAS OU LE DETERMINANT DE DROITE EST D'ORDRE PLUS GRAND QUE 1

    8 COF(1)=1.
      NIN=NI+N2*(N1-1)
      N2N=N2-N1
      DO 9 K=1,N2N
    9 COF(K+1)=-A(NIN+N2*K)
      CALL DPORAB(COF,N2N,TR,TI,KOD)
      IF(KOD.NE.0) RETURN
      DO 10 K=1,N2N
      VPR(N1+K)=TR(K)
   10 VPI(N1+K)=TI(K)
      IF(NN1.EQ.0) GO TO 22
      N2=N1
      GO TO 1

      ALGORITHME DE DANILEVSKI
```

```
11  DO 21 II=1,N2
21  TR(II)=A(NI+N2*(II-1))
    DO 12 II=1,N2
    IIN=II+NNN
12  A(IIN)=A(IIN)/TR(NI1)
    DO 13 JJ=1,N2
    NJJ=NI1+N2*(JJ-1)
13  A(NJJ)=A(NJJ)*TR(NI1)
    DO 15 J=1,N2
    IF(J.EQ.NI1) GO TO 15
    N2J=N2*(J-1)
    DO 14 IJ=1,N2
    IJJ=IJ+N2J
14  A(IJJ)=A(IJJ)-A(IJ+NNN)*TR(J)
15  CONTINUE
    DO 17 J=1,N2
    IF(J.EQ.NI1) GO TO 17
    DO 16 JI=1,N2
    NJ=NI1+N2*(JI-1)
16  A(NJ)=A(NJ)+A(J+N2*(JI-1))*TR(J)
17  CONTINUE
18  CONTINUE
    COF(1)=1.
    DO 19 J=1,N2
19  COF(J+1)=-A(1+N2*(J-1))

    CALCUL ET CLASSEMENT DES VALEURS PROPRES

    CALL DPORAB(COF,N2,VPR,VPI,KOD)
    IF(KOD.NE.0) RETURN
22  N1=N-1
    DO 20 I=1,N1
    I1=I+1
    DO 20 J=I1,N
    IF(VPR(I).LE.VPR(J)) GO TO 20
    V=VPR(I)
    VPR(I)=VPR(J)
    VPR(J)=V
    V=VPI(I)
    VPI(I)=VPI(J)
    VPI(J)=V
20  CONTINUE
    RETURN
    END
```

```
      SUBROUTINE DPORAB(COF,M,X,Y,KOD)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(20),Y(20),COF(21),B(41),C(0:41),S(2),P(2)
      DATA C(0)/0.D+00/

      1. COF: TABLEAU DES COEFFICIENTS DU POLYNOME ORDONNES SUIVANT
      LES PUISSANCES DECROISSANTES DE LA VARIABLE (DIMENSION DE
      COF = M+1).
      2. M: DEGRE DU POLYNOME.
      3. X: TABLEAU DES PARTIES REELLES DES RACINES DU POLYNOME.
      4. Y : TABLEAU DES PARTIES IMAGINAIRES CORRESPONDANTES.
      5. KOD: CODE D'ERREUR
         KOD = 0 SOLUTION NORMALE DU PROBLEME.
         KOD = 1 UNE RACINE NE PEUT ETRE OBTENUE APRES 100 ITERATIONS
                 ET 2 VALEURS DE DEPART DIFFERENTES DE SO ET PO; LE
                 PROGRAMME S'ARRETE.
         KOD = 2 LE DEGRE DU POLYNOME EST INFERIEUR A LA VALEUR M.
         KOD = 3 LE DEGRE DU POLYNOME EST SUPERIEUR A 40.

      N=M+1       300
      KOD=0       310
      KO=0        320
                                  ENVOI AU CODE 3
      IF(M-40)110,110,120
  120 KOD=3
      GOTO 16
                                  ENVOI AU CODE 2
  110 IF(DABS(COF(1))-1.E-6)101,101,100
  101 KOD=2
      DO 102 L=1,M
      COF(L)=COF(L+1)
  102 CONTINUE
      N=M
      M=M-1
      GOTO 110
                                  RECHERCHE DE S ET P
  100 C(1)=COF(1)
      B(1)=COF(1)
      S(1)=0
      P(1)=0
      MUR=1
      I11=0
      I12=0
    1 B(2)=COF(2)+S(1)*B(1)
      C(2)=B(2)+S(1)*C(1)
      DO 5 L=3,N
      B(L)=COF(L)+S(1)*B(L-1)-P(1)*B(L-2)
      IF(L-N)2,5,5
    2 IF(L-N+1)3,4,5                          L (N-1)
    3 C(L)=B(L)+S(1)*C(L-1)-P(1)*C(L-2)
      GOTO 5
    4 C(L)=S(1)*C(L-1)-P(1)*C(L-2)
    5 CONTINUE
      SN=B(N)*C(N-3)-B(N-1)*C(N-2)
      PN=B(N)*C(N-2)-B(N-1)*C(N-1)
      DLAP=C(N-2)*C(N-2)-C(N-1)*C(N-3)
      IF(DLAP.EQ.0.) GO TO 7
```

```
      S(2)=S(1)+SN/DLAP
      P(2)=P(1)+PN/DLAP
      PRE=DABS(S(2)-S(1))+DABS(P(2)-P(1))
      PRE=PRE/(DABS(S(2))+DABS(P(2)))
      IF(PRE-1.E-3)8,6,6
    6 I11=I11+1
      IF(I11-100)111,7,7
  111 S(1)=S(2)
      P(1)=P(2)
      GOTO1
    7 P(1)=1
      S(1)=0
      KO=KO+1
                           ENVOI AU CODE 1
      IF(KO-1) 1,1,19
    8 I12=I12+1
      IF(I12-10)111,9,9
                           CALCUL DES RACINES
    9 DELTA=S(2)**2-4.*P(2)
      IF(DABS(DELTA)-1.E-8)11,11,1253
 1253 IF(DELTA)10,11,12
   10 X(MUR)=S(2)/2.
      X(MUR+1)=S(2)/2.
      Y(MUR)=DSQRT(-DELTA)/2.
      Y(MUR+1)=-Y(MUR)
      GOTO 20
   11 X(MUR)=S(2)/2.
      X(MUR+1)=S(2)/2.
      GOTO 13
   12 X(MUR)=(S(2)+DSQRT(DELTA))/2.
      X(MUR+1)=(S(2)-DSQRT(DELTA))/2.
   13 Y(MUR)=0
      Y(MUR+1)=0
   20 MUR=MUR+2
      N=N-2
                           NOUVEAUX COEFFICIENTS
      IF(N-1)16,16,14
   14 IF(N-2)16,15,17
   15 X(MUR)=-B(2)/COF(1)
      Y(MUR)=0
   16 RETURN
   17 DO 18 L=2,N
      COF(L)=B(L)
   18 CONTINUE
      KO=0
      I11=0
      I12=0
      S(1)=S(2)
      P(1)=P(2)
      GOTO 1
   19 KOD=1
      GOTO16
      END
```

```
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX (F,G,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-E,H,O-W,Y,Z)
      DIMENSION A(18,18),TR(18),TI(18),COF(19),VPR(18),VPI(18),
     1IPER(36),VD(36),VTRAV(36),SAUV(18,18),VEP(18,36),B(36,36),
     2F(18,18),FA(18,18),FB(18,18),IL(18),IC(18),FP(18,1),X(18,1)
     3,XX(18,18)
      DOUBLE COMPLEX JI,DET
      DOUBLE PRECISION GV11,GV21,GV01,GU11,GV31,GU21,GV41,GV12,GU31
      COMMON PR,PI,Z,V11,V21,V01,U11,V31,U21,V41,V12,U31,VA,VB,VC,UA,
     1UB,VE,VF,UC
      ICO=0
      JI=(0.D+00,1.D+00)
      PR=3.D-02
      PI=3.1415926529
      PA=PI/PR/2.
      Z=120.*PI
      V11=1.8412
      V21=3.05424
      V01=3.8317059702
      U11=3.8317059702
      V31=4.20119
      U21=5.13562
      V41=5.31755
      V12=5.33144
      U31=6.38106
      VA=V11*V11
      VB=V21*V21
      VC=V01*V01
      UA=U11*U11
      UB=U21*U21
      VE=V41*V41
      VF=V12*V12
      UC=U31*U31
      Y0=4.06
      YD=0.02
      EPS=0.D+00
      PREC=1.D-04
      N=18
      DO 1 K=1,1
      YA=Y0+YD*K
      WRITE(108,4)YA
    4 FORMAT(1H1,42X,'FREQUENCE YA=',F4.2/42X,18('-'))
      CALL CALC(A,YA,N)
      DO 2 I=1,N
      DO 3 J=1,N
      SAUV(I,J)=A(I,J)
    3 CONTINUE
    2 CONTINUE
      CALL DDANILEV(A,N,TR,TI,COF,VPR,VPI,KOD,EPS)
      IF(KOD.NE.0) WRITE(108,6) KOD
    6 FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      WRITE(108,8)
    8 FORMAT(/////,10X,'VPR',13X,'VPI',//)
      WRITE(108,10)(VPR(I),VPI(I),I=1,N)
   10 FORMAT(1H ,2D17.8)
      DO 20 I=1,N
      IF(VPI(I).NE.0.D+00) GO TO 40
  500 CONTINUE
```

```
      DO 14 II=1,N
      DO 14 J=1,N
   14 A(II,J)=SAUV(II,J)
      CALL ITDIR(A,N,IPER,VD,VTRAV,VPR(I),PREC,NIT,ICO)
      IF(ICO.EQ.3) GO TO 500
      IF(ICO.NE.0) STOP 3
      WRITE(108,7)
    7 FORMAT(//,10X,'VPR',//)
      WRITE(108,9)(VPR(I))
    9 FORMAT(1H ,D17.8)
      DO 13 J=1,N
      VEP(I,J)=VD(J)
   13 CONTINUE
      WRITE(108,11)
   11 FORMAT(//,45X,'VECTEURS PROPRES',///)
      WRITE(108,12)(VEP(I,J),J=1,N)
   12 FORMAT(1H ,8D15.6)
      GO TO 20
   40 NN=2*N
      NITER=0
      RLAMB=0.D+00
  300 CONTINUE
      NITER=NITER+1
      IF(NITER.GT.10) WRITE(108,200)YA;GO TO 1
      DO 50 II=1,N
      L=2*II
      LL=L-1
      DO 60 J=1,N
      JJ=2*J
      B(LL,JJ)=-SAUV(II,J)
      B(L,JJ)=0.D+00
      JJ=JJ-1
      B(L,JJ)=SAUV(II,J)
      B(LL,JJ)=0.D+00
   60 CONTINUE
   50 CONTINUE
      DO 70 II=1,NN
      B(II,II)=VPI(I)
   70 CONTINUE
      CALL ITDIR(B,NN,IPER,VD,VTRAV,RLAMB,PREC,NIT,ICO)
      IF(ICO.EQ.1) RLAMB=1.D-10;GO TO 300
      IF(ICO.EQ.2) STOP 2
      IF(ICO.EQ.3) GO TO 300
      DO 80 J=1,NN
      VEP(I,J)=VD(J)
   80 CONTINUE
      WRITE(108,90)
   90 FORMAT(//,45X,'VECTEURS PROPRES',///)
      WRITE(108,100)(VEP(I,J),J=1,NN)
  100 FORMAT(1H ,8D15.6)
   20 CONTINUE
      DO 110 I=1,N
      DO 110 J=1,N
  110 F(I,J)=(0.D+00,0.D+00)
      DO 120 I=1,N
      IF(VPI(I).EQ.0.D+00) GO TO 140
      DO 130 J=1,N
      LL=2*J-1
```

```
      L=2*J
      F(I,J)=VEP(I,LL)+JI*VEP(I,L)
  130 CONTINUE
      GO TO 120
  140 DO 150 J=1,N
  150 F(I,J)=VEP(I,J)+JI*0.D+00
  120 CONTINUE
      WRITE(108,240)
  240 FORMAT(//,15X,'F(I,2)',//)
      WRITE(108,250)(F(I,2),I=1,N)
  250 FORMAT(1H ,2D15.6)
      Y=YA*YA
      GV11=Y-VA
      GVA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV11)),0.D+00)
      IF(GV11.LT.0.D+00) GVA=-JI*GVA
      GV21=Y-VB
      GVB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV21)),0.D+00)
      IF(GV21.LT.0.D+00) GVB=-JI*GVB
      GV01=Y-VC
      GVC=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV01)),0.D+00)
      IF(GV01.LT.0.D+00) GVC=-JI*GVC
      GU11=Y-UA
      GUA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU11)),0.D+00)
      IF(GU11.LT.0.D+00) GUA=-JI*GUA
      GV31=Y-V31*V31
      GVD=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV31)),0.D+00)
      IF(GV31.LT.0.D+00) GVD=-JI*GVD
      GU21=Y-UB
      GUB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU21)),0.D+00)
      IF(GU21.LT.0.D+00) GUB=-JI*GUB
      GV41=Y-VE
      GVE=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV41)),0.D+00)
      IF(GV41.LT.0.D+00) GVE=-JI*GVE
      GV12=Y-VF
      GVF=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV12)),0.D+00)
      IF(GV12.LT.0.D+00) GVF=-JI*GVF
      GU31=Y-UC
      GUC=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU31)),0.D+00)
      IF(GU31.LT.0.D+00) GUC=-JI*GUC
      WRITE(108,310)
  310 FORMAT(//,18X,'FC',//)
      DO 160 I=1,N
      IF(VPI(I).LT.0.D+00) GO TO 260
      FC=CDEXP(JI*(VPR(I)+JI*VPI(I))*PA)
      IF(DABS(DREAL(FC)).LT.1.D-70) FC=(0.D+00,0.D+00)
      FA(1,I)=F(I,2)-Z*YA/GVA*F(I,1)
      FA(2,I)=(F(I,2)+Z*YA/GVA*F(I,1))*FC
      FA(3,I)=F(I,4)-Z*YA/GVB*F(I,3)
      FA(4,I)=(F(I,4)+Z*YA/GVB*F(I,3))*FC
      FA(5,I)=F(I,6)-Z*YA/GVC*F(I,5)
      FA(6,I)=(F(I,6)+Z*YA/GVC*F(I,5))*FC
      FA(7,I)=F(I,8)+Z*GUA/YA*F(I,7)
      FA(8,I)=(F(I,8)-Z*GUA/YA*F(I,7))*FC
      FA(9,I)=F(I,10)-Z*YA/GVD*F(I,9)
      FA(10,I)=(F(I,10)+Z*YA/GVD*F(I,10))*FC
      FA(11,I)=F(I,12)+Z*GUB/YA*F(I,11)
      FA(12,I)=(F(I,12)-Z*GUB/YA*F(I,11))*FC
      FA(13,I)=F(I,14)-Z*YA/GVE*F(I,13)
```

```
      FA(14,I)=(F(I,14)+Z*YA/GVE*F(I,13))*FC
      FA(15,I)=F(I,16)-Z*YA/GVF*F(I,15)
      FA(16,I)=(F(I,16)+Z*YA/GVF*F(I,15))*FC
      FA(17,I)=F(I,18)+Z*GUC/YA*F(I,17)
      FA(18,I)=(F(I,18)-Z*GUC/YA*F(I,17))*FC
      GO TO 330
260   FC=CDEXP(JI*(VPR(I)-JI*VPI(I))*PA)
      IF(DABS(DREAL(FC)).LT.1.D-70) FC=(0.D+00,0.D+00)
      FA(1,I)=(F(I,2)-Z*YA/GVA*F(I,1))*FC
      FA(2,I)=F(I,2)+Z*YA/GVA*F(I,1)
      FA(3,I)=(F(I,4)-Z*YA/GVB*F(I,3))*FC
      FA(4,I)=F(I,4)+Z*YA/GVB*F(I,3)
      FA(5,I)=(F(I,6)-Z*YA/GVC*F(I,5))*FC
      FA(6,I)=F(I,6)+Z*YA/GVC*F(I,5)
      FA(7,I)=(F(I,8)+Z*GUA/YA*F(I,7))*FC
      FA(8,I)=F(I,8)-Z*GUA/YA*F(I,7)
      FA(9,I)=(F(I,10)-Z*YA/GVD*F(I,9))*FC
      FA(10,I)=F(I,10)+Z*YA/GVD*F(I,10)
      FA(11,I)=(F(I,12)+Z*GUB/YA*F(I,11))*FC
      FA(12,I)=F(I,12)-Z*GUB/YA*F(I,11)
      FA(13,I)=(F(I,14)-Z*YA/GVE*F(I,13))*FC
      FA(14,I)=F(I,14)+Z*YA/GVE*F(I,13)
      FA(15,I)=(F(I,16)-Z*YA/GVF*F(I,15))*FC
      FA(16,I)=F(I,16)+Z*YA/GVF*F(I,15)
      FA(17,I)=(F(I,18)+Z*GUC/YA*F(I,17))*FC
      FA(18,I)=F(I,18)-Z*GUC/YA*F(I,17)
330   CONTINUE
      WRITE(108,320)FC
320   FORMAT(1H ,2D17.8)
160   CONTINUE
      WRITE(108,340)
340   FORMAT(//,45X,'MATRICE FA(I,J)',//)
      DO 350 I=1,N
      WRITE(108,360)(FA(I,J),J=1,N)
360   FORMAT(/,1H0,8D15.6,/(1H ,8D15.6))
350   CONTINUE
      EPSP=1.D-15
      CALL DMRINV(FA,FB,N,KOD,DET,EPSP,IL,IC)
      IF(KOD.NE.0) WRITE(108,170) KOD
170   FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      WRITE(108,370)
370   FORMAT(//,40X,'MATRICE INVERSE FB(I,J)',//)
      DO 380 I=1,N
      WRITE(108,390)(FB(I,J),J=1,N)
390   FORMAT(/,1H0,8D15.6,/(1H ,8D15.6))
380   CONTINUE
      CALL PRD(FB,FA,XX,N,N,N)
      WRITE(108,600)
600   FORMAT(//,50X,'MATRICE UNITAIRE',//)
      DO 700 I=1,N
      WRITE(108,800)(XX(I,J),J=1,N)
800   FORMAT(/,1H0,8D15.6,/(1H ,8D15.6))
700   CONTINUE
      DO 210 I=1,N
210   FP(I,1)=(0.D+00,0.D+00)
      FP(1,1)=2.D+00+JI*0.D+00
      CALL PRD(FB,FP,X,N,N,1)
      WRITE(108,220)
```

```
220 FORMAT(//,50X,'SOLUTION X',//)
    WRITE(108,230)(X(I,1),I=1,N)
230 FORMAT(1H 2D17.8)
    FBA=(0.D+00,0.D+00)
    FBB=(0.D+00,0.D+00)
    DO 180 I=1,N
    IF(VPI(I).LT.0.D+00) GO TO 270
    FC=CDEXP(JI*(VPR(I)+JI*VPI(I))*PA)
    FBS=F(I,2)*X(I,1)*FC
    FBE=F(I,2)*X(I,1)
    GO TO 280
270 FC=CDEXP(JI*(VPR(I)-JI*VPI(I))*PA)
    FBS=F(I,2)*X(I,1)
    FBE=F(I,2)*X(I,1)*FC
280 FBA=FBA+FBS
    FBB=FBB+FBE
180 CONTINUE
    BS=CDABS(FBA)
    FBC=FBB-1.D+00
    BE=CDABS(FBC)
    ES=BS*BS
    EE=BE*BE
    PH=DATAN(DIMAG(FBA)/DREAL(FBA))
    WRITE(108,190)
190 FORMAT(//,10X,'YA',14X,'VPR',14X,'BS',16X,'ES',16X,'BE',16X,
   1'EE',16X,'PH',//)
    WRITE(108,200)(YA,VPR(18),BS,ES,BE,EE,PH)
200 FORMAT(1H ,7D17.8)
  1 CONTINUE
    STOP
    END
```

```
      SUBROUTINE CALC(A,YA,N)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N,N)
      COMMON PR,PI,Z,V11,V21,V01,U11,V31,U21,V41,V12,U31,VA,VB,VC,UA,
     1UB,VE,VF,UC
      DATA ZERO/0.D+00/
      DO 2 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      A(I,J)=ZERO
    1 CONTINUE
    2 CONTINUE
      VD=V31*V31
      Y=YA*YA
      A(1,2)=(Y-VA)/(Z*YA)
      A(1,4)=PR*V21*(2.*Y*(VA+VB-VA*VB)-VA*VB*(4.-VA-VB))/
     1(Z*YA*V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(1,6)=PR*DSQRT(2.)*V11*VC*(VC+VA-2.*Y)/
     1(Z*YA*(VC-VA)**2.*DSQRT(VA-1.))
      A(1,12)=PR*YA*U21/(Z*V11*(UB-VA)*DSQRT(VA-1.))
      A(2,1)=Z*YA
      A(2,3)=Z*PR*2.*V21*YA*(VA+VB-VA*VB)/
     1(V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(2,5)=-Z*PR*2.*DSQRT(2.)*YA*V11*VC/((VC-VA)**2.*DSQRT(VA-1.))
      A(2,11)=-Z**2.*A(1,12)
      A(3,2)=VA/VB*A(1,4)
      A(3,4)=(Y-VB)/(Z*YA)
      A(3,8)=-PR*2.*YA*U11/(Z*V21*(VB-UA)*DSQRT(VB-4.))
      A(3,10)=PR*V31*(2.*Y*(3.*VD+3.*VB-VD*VB)-VD*VB*(12.-VD-VB))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(3,16)=PR*V12*(2.*Y*(VF+VB-VF*VB)-VF*VB*(4.-VF-VB))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VF)**2.*DSQRT((VF-1.)*(VB-4.)))
      A(3,18)=-PR*2.*YA*U31/(Z*V21*(VB-UC)*DSQRT(VB-4.))
      A(4,1)=VA/VB*A(2,3)
      A(4,3)=A(2,1)
      A(4,7)=-Z**2.*A(3,8)
      A(4,9)=Z*PR*2.*V31*YA*(3.*VD+3.*VB-VD*VB)/
     1(V21*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(4,15)=Z*PR*2.*V12*YA*(VF+VB-VF*VB)/
     1(V21*(VB-VF)**2.*DSQRT((VB-4.)*(VF-1.)))
      A(4,17)=-Z**2.*A(3,18)
      A(5,2)=VA/VC*A(1,6)
      A(5,6)=(Y-VC)/(Z*YA)
      A(5,16)=PR*DSQRT(2.)*V12*VF*(VC+VF-2.*Y)/
     1(Z*YA*(VC-VF)**2.*DSQRT(VF-1.))
      A(6,1)=VA/VC*A(2,5)
      A(6,5)=A(2,1)
      A(6,15)=-Z*PR*2.*DSQRT(2.)*YA*VF*V12/((VC-VF)**2.*DSQRT(VF-1.))
      A(7,4)=-VB/UA*A(3,8)
      A(7,8)=-YA/Z
      A(7,12)=PR*YA*U21*(UB+UA)/(Z*U11*(UB-UA)**2.)
      A(8,3)=VB/UA*A(4,7)
      A(8,7)=-Z*(Y-UA)/YA
      A(8,11)=Z*PR*U21*(Y*(UB+UA)-2.*UA*UB)/(U11*YA*(UB-UA)**2.)
      A(9,4)=VB/VD*A(3,10)
      A(9,10)=(Y-VD)/(Z*YA)
      A(9,12)=PR*3.*YA*U21/(Z*V31*(UB-VD)*DSQRT(VD-9.))
      A(9,14)=PR*V41*(2.*Y*(6.*VD+6.*VE-VD*VE)-VD*VE*(24.-VE-VD))/
     1(Z*V31*YA*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))
```

```
      A(10,3)=VB/VD*A(4,9)
      A(10,9)=A(2,1)
      A(10,11)=-Z**2.*A(9,12)
      A(10,13)=Z*PR*2.*V41*YA*(6.*VD+6.*VE-VD*VE)/
     1(V31*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))
      A(11,2)=-VA/UB*A(1,12)
      A(11,8)=UA/UB*A(7,12)
      A(11,10)=-VD/UB*A(9,12)
      A(11,12)=A(7,8)
      A(11,16)=-PR*YA*V12/(Z*U21*(UB-VF)*DSQRT(VF-1.))
      A(11,18)=PR*YA*U31*(UB+UC)/(Z*U21*(UB-UC)**2.)
      A(12,1)=-VA/UB*A(2,11)
      A(12,7)=UA/UB*A(8,11)
      A(12,9)=-VD/UB*A(10,11)
      A(12,11)=-Z*(Y-UB)/YA
      A(12,15)=-Z**2.*A(11,16)
      A(12,17)=Z*PR*U31*(Y*(UB+UC)-2.*UB*UC)/(U21*YA*(UB-UC)**2.)
      A(13,10)=VD/VE*A(9,14)
      A(13,14)=(Y-VE)/(Z*YA)
      A(13,18)=-PR*4.*YA*U31/(Z*V41*(VE-UC)*DSQRT(VE-16.))
      A(14,9)=VD/VE*A(10,13)
      A(14,13)=A(2,1)
      A(14,17)=-Z**2.*A(13,18)
      A(15,4)=VB/VF*A(3,16)
      A(15,6)=VC/VF*A(5,16)
      A(15,12)=-UB/VF*A(11,16)
      A(15,16)=(Y-VF)/(Z*YA)
      A(16,3)=VB/VF*A(4,15)
      A(16,5)=VC/VF*A(6,15)
      A(16,11)=-UB/VF*A(12,15)
      A(16,15)=A(2,1)
      A(17,4)=-VB/UC*A(3,18)
      A(17,12)=UB/UC*A(11,18)
      A(17,14)=-VE/UC*A(13,18)
      A(17,18)=A(7,8)
      A(18,3)=-VB/UC*A(4,17)
      A(18,11)=UB/UC*A(12,17)
      A(18,13)=-VE/UC*A(14,17)
      A(18,17)=-Z*(Y-UC)/YA
      RETURN
      END
```

```
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX (F,G,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-E,H,O-W,Y,Z)
      DIMENSION A(20,20),SAUV(20,20),FA(20,20),FB(20,20),VEP(20,20)
     1,TAB(10),INDIC(10),X(20)
      COMMON PR,PI,Z,V11,U01,V21,U11,V31,U21,V41,V12,U02,U31,VA,UF,VB,
     1UA,UB,VE,VF,UD,UC
      PR=3.D-2
      PI=3.1415926529
      Z=120.*PI
      V11=1.84118
      U01=2.4048255577
      V21=3.05424
      U11=3.8317059702
      V31=4.20119
      U21=5.13562
      V41=5.31755
      V12=5.33144
      U02=5.5200781103
      U31=6.38016
      V51=6.41562
      VA=V11*V11
      UF=U01*U01
      VB=V21*V21
      UA=U11*U11
      UB=U21*U21
      VE=V41*V41
      VF=V12*V12
      UD=U02*U02
      UC=U31*U31
      TAB(1)=U01
      TAB(2)=V21
      TAB(3)=U11
      TAB(4)=V31
      TAB(5)=U21
      TAB(6)=V41
      TAB(7)=V12
      TAB(8)=U02
      TAB(9)=U31
      TAB(10)=V51
      INDIC(1)=2
      INDIC(2)=4
      INDIC(3)=6
      INDIC(4)=8
      INDIC(5)=10
      INDIC(6)=12
      INDIC(7)=14
      INDIC(8)=16
      INDIC(9)=18
      INDIC(10)=20
      N=20
      Y0=1.84
      YD=0.02
      WRITE(108,4)
    4 FORMAT(1H1,44X,'POLARISATION',1X,'PARALLELE'/44X,25('-'),//)
      WRITE(108,190)
  190 FORMAT(//,10X,'YA',14X,'VPR',14X,'BS',16X,'ES',16X,'BE',16X,
     1'EE',16X,'PH',//)
      DO 1 K=1,300
      YA=Y0+YD*K
      ICO=0
      DO 2 I=1,9
      IF(YA.LT.TAB(I)) GO TO 3
    2 CONTINUE
    3 NOUV=INDIC(I)
      CALL PRINC(A,YA,SAUV,VEP,FA,FB,X,NOUV,N)
    1 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE PRINC(A,YA,SAUV,VEP,FA,FB,X,NOUV,N)
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX (F,G,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-E,H,O-W,Y,Z)
      DIMENSION A(N,N),FA(NOUV,NOUV),FB(NOUV,NOUV),X(NOUV)
     1,VEP(NOUV,NOUV)
      DIMENSION TR(20),TI(20),COF(21),VPR(20),VPI(20),IPER(20),VD(20),
     1VTRAV(20),IL(20),IC(20),FP(20),V(20),VP(20)
      DOUBLE COMPLEX JI,DET
      DOUBLE PRECISION GV11,GU01,GV21,GU11,GV31,GU21,GV41,GV12,GU02,GU31
      COMMON PR,PI,Z,V11,U01,V21,U11,V31,U21,V41,V12,U02,U31,VA,UF,VB,
     1UA,UB,VE,VF,UD,UC
      JI=(0.D+00,1.D+00)
      EPS=0.D+00
      PREC=1.D-06
      PA=PI/PR/2.
      Y=YA*YA
      CALL CALC(A,YA)
      CALL DDANILEV(A,N,TR,TI,COF,VPR,VPI,KOD,EPS)
      IF(KOD.NE.0.) WRITE(108,6) KOD
    6 FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      DO 17 I=1,N
      V(I)=VPR(I)
   17 CONTINUE
      M=NOUV/2
      DO 14 I=1,M
      VP(I)=V(I)
      MM=NOUV+1-I
      MN=N+1-I
      VP(MM)=V(MN)
   14 CONTINUE
      DO 18 I=1,NOUV
      VPR(I)=VP(I)
   18 CONTINUE
      DO 20 I=1,NOUV
  500 CONTINUE
      CALL CALC(A,YA)
      CALL STOCK(A,SAUV,NOUV)
      CALL ITDIR(SAUV,NOUV,IPER,VD,VTRAV,VPR(I),PREC,NIT,ICO)
      IF(ICO.EQ.3) GO TO 500
      IF(ICO.NE.0) WRITE(108,201)YA;RETURN
  201 FORMAT(1H ,17X,D17.8)
      DO 13 J=1,NOUV
      VEP(I,J)=VD(J)
   13 CONTINUE
   20 CONTINUE
      GV11=Y-VA
      GVA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV11)),0.D+00)
      IF(GV11.LT.0.D+00) GVA=-JI*GVA
      GU01=Y-UF
      GUF=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU01)),0.D+00)
      IF(GU01.LT.0.D+00) GUF=-JI*GUF
      GV21=Y-VB
      GVB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV21)),0.D+00)
      IF(GV21.LT.0.D+00) GVB=-JI*GVB
      GU11=Y-UA
      GUA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU11)),0.D+00)
      IF(GU11.LT.0.D+00) GUA=-JI*GUA
      GV31=Y-V31*V31
```

```
      GVD=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV31)),0.D+00)
      IF(GV31.LT.0.D+00) GVD=-JI*GVD
      GU21=Y-UB
      GUB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU21)),0.D+00)
      IF(GU21.LT.0.D+00) GUB=-JI*GUB
      GV41=Y-VE
      GVE=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV41)),0.D+00)
      IF(GV41.LT.0.D+00) GVE=-JI*GVE
      GV12=Y-VF
      GVF=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV12)),0.D+00)
      IF(GV12.LT.0.D+00) GVF=-JI*GVF
      GU02=Y-UD
      GUD=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU02)),0.D+00)
      IF(GU02.LT.0.D+00) GUD=-JI*GUD
      GU31=Y-UC
      GUC=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU31)),0.D+00)
      IF(GU31.LT.0.D+00) GUC=-JI*GUC
      DO 30 I=1,NOUV
      FC=CDEXP(JI*(VPR(I)*PA))
      IF(NOUV.NE.2) GO TO 40
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      GO TO 30
   40 IF(NOUV.NE.4) GO TO 50
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      GO TO 30
   50 IF(NOUV.NE.6) GO TO 60
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      GO TO 30
   60 IF(NOUV.NE.8) GO TO 70
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      GO TO 30
   70 IF(NOUV.NE.10) GO TO 80
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
```

```
      GO TO 30
   80 IF(NOUV.NE.12) GO TO 90
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      GO TO 30
   90 IF(NOUV.NE.14) GO TO 100
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      FA(13,I)=VEP(I,14)-Z*YA/GVE*VEP(I,13)
      FA(14,I)=(VEP(I,14)+Z*YA/GVE*VEP(I,13))*FC
      GO TO 30
  100 IF(NOUV.NE.16) GO TO 110
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      FA(13,I)=VEP(I,14)-Z*YA/GVE*VEP(I,13)
      FA(14,I)=(VEP(I,14)+Z*YA/GVE*VEP(I,13))*FC
      FA(15,I)=VEP(I,16)-Z*YA/GVF*VEP(I,15)
      FA(16,I)=(VEP(I,16)+Z*YA/GVF*VEP(I,15))*FC
      GO TO 30
  110 IF(NOUV.NE.18) GO TO 120
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
```

```
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      FA(13,I)=VEP(I,14)-Z*YA/GVE*VEP(I,13)
      FA(14,I)=(VEP(I,14)+Z*YA/GVE*VEP(I,13))*FC
      FA(15,I)=VEP(I,16)-Z*YA/GVF*VEP(I,15)
      FA(16,I)=(VEP(I,16)+Z*YA/GVF*VEP(I,15))*FC
      FA(17,I)=VEP(I,18)+Z*GUD/YA*VEP(I,17)
      FA(18,I)=(VEP(I,18)-Z*GUD/YA*VEP(I,17))*FC
      GO TO 30
  120 FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)+Z*GUF/YA*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)-Z*GUF/YA*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVB*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVB*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      FA(13,I)=VEP(I,14)-Z*YA/GVE*VEP(I,13)
      FA(14,I)=(VEP(I,14)+Z*YA/GVE*VEP(I,13))*FC
      FA(15,I)=VEP(I,16)-Z*YA/GVF*VEP(I,15)
      FA(16,I)=(VEP(I,16)+Z*YA/GVF*VEP(I,15))*FC
      FA(17,I)=VEP(I,18)+Z*GUD/YA*VEP(I,17)
      FA(18,I)=(VEP(I,18)-Z*GUD/YA*VEP(I,17))*FC
      FA(19,I)=VEP(I,20)+Z*GUC/YA*VEP(I,19)
      FA(20,I)=(VEP(I,20)-Z*GUC/YA*VEP(I,19))*FC
   30 CONTINUE
      EPSP=0.D-15
      CALL DMRINV(FA,FB,NOUV,KOD,DET,EPSP,IL,IC)
      IF(KOD.NE.0) WRITE(108,170) KOD
  170 FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      DO 210 I=1,NOUV
  210 FP(I)=(0.D+00,0.D+00)
      FP(1)=2.D+00+JI*0.D+00
      CALL PRD(FB,FP,X,NOUV,NOUV,1)
      FBA=(0.D+00,0.D+00)
      FBB=(0.D+00,0.D+00)
      DO 180 I=1,NOUV
      FC=CDEXP(JI*(VPR(I)*PA))
      FBS=VEP(I,2)*X(I)*FC
      FBE=VEP(I,2)*X(I)
      FBA=FBA+FBS
      FBB=FBB+FBE
  180 CONTINUE
      BS=CDABS(FBA)
      FBC=FBB-1.D+00
      BE=CDABS(FBC)
      ES=BS*BS
      EE=BE*BE
      PH=DATAN(DIMAG(FBA)/DREAL(FBA))
      WRITE(108,200)(YA,VPR(1),BS,ES,BE,EE,PH)
  200 FORMAT(1H ,7D17.8)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CALC(A,YA)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(20,20)
      COMMON PR,PI,Z,V11,U01,V21,U11,V31,U21,V41,V12,U02,U31,VA,UF,VB,
     1UA,UB,VE,VF,UD,UC
      DATA ZERO/0.D+00/
      DO 2 I=1,20
      DO 1 J=1,20
      A(I,J)=ZERO
    1 CONTINUE
    2 CONTINUE
      VD=V31*V31
      Y=YA*YA

                      MODE TE11

      A(1,2)=(Y-VA)/(Z*YA)
      A(1,4)=-PR*DSQRT(2.)*YA*U01/(Z*V11*(UF-VA)*DSQRT(VA-1.))
      A(1,6)=PR*V21*(2.*Y*(VA+VB-VA*VB)-VA*VB*(4.-VA-VB))/
     1(Z*YA*V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(1,12)=-PR*YA*U21/(Z*V11*(UB-VA)*DSQRT(VA-1.))
      A(1,18)=-PR*DSQRT(2.)*YA*U02/(Z*V11*(UD-VA)*DSQRT(VA-1.))
      A(2,1)=Z*YA
      A(2,3)=-Z**2.*A(1,4)
      A(2,5)=Z*PR*2.*YA*V21*(VA+VB-VA*VB)/
     1(V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(2,11)=-Z**2.*A(1,12)
      A(2,17)=-Z**2.*A(1,18)

                      MODE TM01

      A(3,2)=-VA/UF*A(1,4)
      A(3,4)=-YA/Z
      A(3,8)=PR*DSQRT(2.)*U11*YA*(UF+UA)/(Z*U01*(UF-UA)**2.)
      A(3,16)=PR*DSQRT(2.)*YA*V12/(Z*U01*(UF-VF)*DSQRT(VF-1.))
      A(4,1)=-Z**2.*A(3,2)
      A(4,3)=-Z*(Y-UF)/YA
      A(4,7)=Z*PR*DSQRT(2.)*U11*(Y*(UF+UA)-2.*UF*UA)/
     1(U01*YA*(UF-UA)**2.)
      A(4,15)=-Z**2.*A(3,16)

                      MODE TE21

      A(5,2)=VA/VB*A(1,6)
      A(5,6)=(Y-VB)/(Z*YA)
      A(5,8)=PR*2.*YA*U11/(Z*V21*(VB-UA)*DSQRT(VB-4.))
      A(5,10)=PR*V31*(2.*Y*(3.*VD+3.*VB-VB*VD)-VB*VD*(12.-VD-VB))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(5,16)=PR*V12*(2.*Y*(VF+VB-VB*VF)-VB*VF*(4.-VB-VF))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VF)**2.*DSQRT((VF-1.)*(VB-4.)))
      A(5,20)=PR*2.*YA*U31/(Z*V21*(VB-UC)*DSQRT(VB-4.))
      A(6,1)=VA/VB*A(2,5)
      A(6,5)=A(2,1)
      A(6,7)=-Z**2.*A(5,8)
      A(6,9)=Z*PR*2.*V31*YA*(3.*VD+3.*VB-VB*VD)/
     1(V21*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(6,15)=Z*PR*2.*V12*YA*(VF+VB-VB*VF)/
     1(V21*(VB-VF)**2.*DSQRT((VF-1.)*(VB-4.)))
```

```
A(6,19)=-Z**2.*A(5,20)

                    MODE TM11

A(7,4)=UF/UA*A(3,8)
A(7,6)=-VB/UA*A(5,8)
A(7,8)=A(3,4)
A(7,12)=PR*YA*U21*(UB+UA)/(Z*U11*(UB-UA)**2.)
A(7,18)=PR*DSQRT(2.)*YA*U02*(UD+UA)/(Z*U11*(UD-UA)**2.)
A(8,3)=UF/UA*A(4,7)
A(8,5)=-VB/UA*A(6,7)
A(8,7)=-Z*(Y-UA)/YA
A(8,11)=Z*PR*U21*(Y*(UA+UB)-2.*UA*UB)/(U11*YA*(UB-UA)**2.)
A(8,17)=Z*PR*DSQRT(2.)*U02*(Y*(UD+UA)-2.*UD*UA)/
1(U11*YA*(UD-UA)**2.)

                    MODE TE31

A(9,6)=VB/VD*A(5,10)
A(9,10)=(Y-VD)/(Z*YA)
A(9,12)=-PR*3.*YA*U21/(Z*V31*(UB-VD)*DSQRT(VD-9.))
A(9,14)=PR*V41*(2.*Y*(6.*VD+6.*VE-VE*VD)-VE*VD*(24.-VE-VD))/
1(Z*V31*YA*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))
A(10,5)=VB/VD*A(6,9)
A(10,9)=A(2,1)
A(10,11)=-Z**2.*A(9,12)
A(10,13)=Z*PR*2.*V41*YA*(6.*VD+6.*VE-VE*VD)/
1(V31*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))

                    MODE TM21

A(11,2)=-VA/UB*A(1,12)
A(11,8)=UA/UB*A(7,12)
A(11,10)=-VD/UB*A(9,12)
A(11,12)=A(3,4)
A(11,16)=PR*YA*V12/(Z*U21*(UB-VF)*DSQRT(VF-1.))
A(11,20)=PR*U31*YA*(UB+UC)/(Z*U21*(UB-UC)**2.)
A(12,1)=-VA/UB*A(2,11)
A(12,7)=UA/UB*A(8,11)
A(12,9)=-VD/UB*A(10,11)
A(12,11)=-Z*(Y-UB)/YA
A(12,15)=-Z**2.*A(11,16)
A(12,19)=Z*PR*U31*(Y*(UB+UC)-2.*UC*UB)/(U21*YA*(UB-UC)**2.)

                    MODE TE41

A(3,10)=VD/VE*A(9,14)
A(13,14)=(Y-VE)/(Z*YA)
A(13,20)=PR*4.*YA*U31/(Z*V41*(VE-UC)*DSQRT(VE-16.))
A(14,9)=VD/VE*A(10,13)
A(14,13)=A(2,1)
A(14,19)=-Z**2.*A(13,20)

                    MODE TE12

A(15,4)=-UF/VF*A(3,16)
A(15,6)=VB/VF*A(5,16)
A(15,12)=-UB/VF*A(11,16)
```

```
      A(15,16)=(Y-VF)/(Z*YA)
      A(15,18)=-PR*DSQRT(2.)*YA*U02/(Z*V12*(UD-VF)*DSQRT(VF-1.)
      A(16,3)=-UF/VF*A(4,15)
      A(16,5)=VB/VF*A(6,15)
      A(16,11)=-UB/VF*A(12,15)
      A(16,15)=A(2,1)
      A(16,17)=-Z**2.*A(15,18)

                         MODE  TM02

      A(17,2)=-VA/UD*A(1,18)
      A(17,8)=UA/UD*A(7,18)
      A(17,16)=-VF/UD*A(15,18)
      A(17,18)=A(3,4)
      A(18,1)=-VA/UD*A(2,17)
      A(18,7)=UA/UD*A(8,17)
      A(18,15)=-VF/UD*A(16,17)
      A(18,17)=-Z*(Y-UD)/YA

                         MODE  TM31

      A(19,6)=-VB/UC*A(5,20)
      A(19,12)=UB/UC*A(11,20)
      A(19,14)=-VE/UC*A(13,20)
      A(19,20)=A(3,4)
      A(20,5)=-VB/UC*A(6,19)
      A(20,11)=UB/UC*A(12,19)
      A(20,13)=-VE/UC*A(14,19)
      A(20,19)=-Z*(Y-UC)/YA
      RETURN
      END


      SUBROUTINE STOCK(A,SAUV,NOUV)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(20,20),SAUV(NOUV,NOUV)
      DO 1 I=1,NOUV
      DO 1 J=1,NOUV
    1 SAUV(I,J)=A(I,J)
      RETURN
      END
```

```
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX (F,G,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-E,H,O-W,Y,Z)
      DIMENSION A(18,18),SAUV(18,18),FA(18,18),FB(18,18),VEP(18,18),
     1TAB(8),INDIC(8),X(18)
      COMMON PR,PI,Z,V11,V21,V01,U11,V31,U21,V41,V12,U31,VA,VB,VC,UA,
     1UB,VE,VF,UC
      PR=3.D-2
      PI=3.1415926529
      Z=120.*PI
      V11=1.84118
      V21=3.05424
      V01=3.8317059702
      U11=3.8317059702
      V31=4.20119
      U21=5.13562
      V41=5.31755
      V12=5.33144
      U31=6.38016
      V51=6.41562
      VA=V11*V11
      VB=V21*V21
      VC=V01*V01
      UA=U11*U11
      UB=U21*U21
      VE=V41*V41
      VF=V12*V12
      UC=U31*U31
      TAB(1)=V21
      TAB(2)=V01
      TAB(3)=V31
      TAB(4)=U21
      TAB(5)=V41
      TAB(6)=V12
      TAB(7)=U31
      TAB(8)=V51
      INDIC(1)=2
      INDIC(2)=4
      INDIC(3)=8
      INDIC(4)=10
      INDIC(5)=12
      INDIC(6)=14
      INDIC(7)=16
      INDIC(8)=18
      N=18
      Y0=1.84
      YD=0.02
      WRITE(108,4)
    4 FORMAT(1H1,44X,'POLARISATION',1X,'PERPENDICULAIRE'/44X,30('-'),//)
      WRITE(108,190)
  190 FORMAT(//,10X,'YA',14X,'VPR',14X,'BS',16X,'ES',16X,'BE',16X,
     1'EE',16X,'PH',//)
      DO 1 K=1,300
      YA=Y0+YD*K
      ICO=0
      DO 2 I=1,7
      IF(YA.LT.TAB(I)) GO TO 3
    2 CONTINUE
    3 NOUV=INDIC(I)
      CALL PRINC(A,YA,SAUV,VEP,FA,FB,X,NOUV,N)
    1 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE PRINC(A,YA,SAUV,VEP,FA,FB,X,NOUV,N)
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX (F,G,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-E,H,O-W,Y,Z)
      DIMENSION A(N,N),FA(NOUV,NOUV),FB(NOUV,NOUV),X(NOUV)
     1,VEP(NOUV,NOUV)
      DIMENSION TR(18),TI(18),COF(19),VPR(18),VPI(18),IPER(18),VD(18),
     1VTRAV(18),IL(18),IC(18),FP(18),V(18),VP(18)
      DOUBLE COMPLEX JI,DET
      DOUBLE PRECISION GV11,GV21,GV01,GU11,GV31,GU21,GV41,GV12,GU31
      COMMON PR,PI,Z,V11,V21,V01,U11,V31,U21,V41,V12,U31,VA,VB,VC,UA,
     1UB,VE,VF,UC
      JI=(0.D+00,1.D+00)
      EPS=0.D+00
      PREC=1.D-06
      PA=PI/PR/2.
      Y=YA*YA
      CALL CALC(A,YA)
      CALL DDANILEV(A,N,TR,TI,COF,VPR,VPI,KOD,EPS)
      IF(KOD.NE.0.) WRITE(108,6) KOD
    6 FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      DO 17 I=1,N
      V(I)=VPR(I)
   17 CONTINUE
      M=NOUV/2
      DO 14 I=1,M
      VP(I)=V(I)
      MM=NOUV+1-I
      MN=N+1-I
      VP(MM)=V(MN)
   14 CONTINUE
      DO 18 I=1,NOUV
      VPR(I)=VP(I)
   18 CONTINUE
      DO 20 I=1,NOUV
  500 CONTINUE
      CALL CALC(A,YA)
      CALL STOCK(A,SAUV,NOUV)
      CALL ITDIR(SAUV,NOUV,IPER,VD,VTRAV,VPR(I),PREC,NIT,ICO)
      IF(ICO.EQ.3) GO TO 500
      IF(ICO.NE.0) WRITE(108,201)YA;RETURN
  201 FORMAT(1H ,17X,D17.8)
      DO 13 J=1,NOUV
      VEP(I,J)=VD(J)
   13 CONTINUE
   20 CONTINUE
      GV11=Y-VA
      GVA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV11)),0.D+00)
      IF(GV11.LT.0.D+00) GVA=-JI*GVA
      GV21=Y-VB
      GVB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV21)),0.D+00)
      IF(GV21.LT.0.D+00) GVB=-JI*GVB
      GV01=Y-VC
      GVC=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV01)),0.D+00)
      IF(GV01.LT.0.D+00) GVC=-JI*GVC
      GU11=Y-UA
      GUA=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU11)),0.D+00)
      IF(GU11.LT.0.D+00) GUA=-JI*GUA
      GV31=Y-V31*V31
```

```
      GVD=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV31)),0.D+00)
      IF(GV31.LT.0.D+00) GVD=-JI*GVD
      GU21=Y-UB
      GUB=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU21)),0.D+00)
      IF(GU21.LT.0.D+00) GUB=-JI*GUB
      GV41=Y-VE
      GVE=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV41)),0.D+00)
      IF(GV41.LT.0.D+00) GVE=-JI*GVE
      GV12=Y-VF
      GVF=DCMPLX(DSQRT(DABS(GV12)),0.D+00)
      IF(GV12.LT.0.D+00) GVF=-JI*GVF
      GU31=Y-UC
      GUC=DCMPLX(DSQRT(DABS(GU31)),0.D+00)
      IF(GU31.LT.0.D+00) GUC=-JI*GUC
      DO 30 I=1,NOUV
      FC=CDEXP(JI*(VPR(I)*PA))
      IF(NOUV.NE.2) GO TO 40
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      GO TO 30
   40 IF(NOUV.NE.4) GO TO 50
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)-Z*YA/GVB*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)+Z*YA/GVB*VEP(I,3))*FC
      GO TO 30
   50 IF(NOUV.NE.8) GO TO 60
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)-Z*YA/GVB*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)+Z*YA/GVB*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVC*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVC*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      GO TO 30
   60 IF(NOUV.NE.10) GO TO 70
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)-Z*YA/GVB*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)+Z*YA/GVB*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVC*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVC*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      GO TO 30
   70 IF(NOUV.NE.12) GO TO 80
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)-Z*YA/GVB*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)+Z*YA/GVB*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVC*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVC*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
```

```
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      GO TO 30
   80 IF(NOUV.NE.14) GO TO 90
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)-Z*YA/GVB*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)+Z*YA/GVB*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVC*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVC*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      FA(13,I)=VEP(I,14)-Z*YA/GVE*VEP(I,13)
      FA(14,I)=(VEP(I,14)+Z*YA/GVE*VEP(I,13))*FC
      GO TO 30
   90 IF(NOUV.NE.16) GO TO 100
      FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)-Z*YA/GVB*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)+Z*YA/GVB*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVC*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVC*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      FA(13,I)=VEP(I,14)-Z*YA/GVE*VEP(I,13)
      FA(14,I)=(VEP(I,14)+Z*YA/GVE*VEP(I,13))*FC
      FA(15,I)=VEP(I,16)-Z*YA/GVF*VEP(I,15)
      FA(16,I)=(VEP(I,16)+Z*YA/GVF*VEP(I,15))*FC
      GO TO 30
  100 FA(1,I)=VEP(I,2)-Z*YA/GVA*VEP(I,1)
      FA(2,I)=(VEP(I,2)+Z*YA/GVA*VEP(I,1))*FC
      FA(3,I)=VEP(I,4)-Z*YA/GVB*VEP(I,3)
      FA(4,I)=(VEP(I,4)+Z*YA/GVB*VEP(I,3))*FC
      FA(5,I)=VEP(I,6)-Z*YA/GVC*VEP(I,5)
      FA(6,I)=(VEP(I,6)+Z*YA/GVC*VEP(I,5))*FC
      FA(7,I)=VEP(I,8)+Z*GUA/YA*VEP(I,7)
      FA(8,I)=(VEP(I,8)-Z*GUA/YA*VEP(I,7))*FC
      FA(9,I)=VEP(I,10)-Z*YA/GVD*VEP(I,9)
      FA(10,I)=(VEP(I,10)+Z*YA/GVD*VEP(I,9))*FC
      FA(11,I)=VEP(I,12)+Z*GUB/YA*VEP(I,11)
      FA(12,I)=(VEP(I,12)-Z*GUB/YA*VEP(I,11))*FC
      FA(13,I)=VEP(I,14)-Z*YA/GVE*VEP(I,13)
      FA(14,I)=(VEP(I,14)+Z*YA/GVE*VEP(I,13))*FC
      FA(15,I)=VEP(I,16)-Z*YA/GVF*VEP(I,15)
      FA(16,I)=(VEP(I,16)+Z*YA/GVF*VEP(I,15))*FC
      FA(17,I)=VEP(I,18)+Z*GUC/YA*VEP(I,17)
      FA(18,I)=(VEP(I,18)-Z*GUC/YA*VEP(I,17))*FC
   30 CONTINUE
      EPSP=0.D-15
```

```
      CALL DMRINV(FA,FB,NOUV,KOD,DET,EPSP,IL,IC)
      IF(KOD.NE.0) WRITE(108,170) KOD
  170 FORMAT(1H ,'KOD=',I3)
      DO 210 I=1,NOUV
  210 FP(I)=(0.D+00,0.D+00)
      FP(1)=2.D+00+JI*0.D+00
      CALL PRD(FB,FP,X,NOUV,NOUV,1)
      FBA=(0.D+00,0.D+00)
      FBB=(0.D+00,0.D+00)
      DO 180 I=1,NOUV
      FC=CDEXP(JI*(VPR(I)*PA))
      FBS=VEP(I,2)*X(I)*FC
      FBE=VEP(I,2)*X(I)
      FBA=FBA+FBS
      FBB=FBB+FBE
  180 CONTINUE
      BS=CDABS(FBA)
      FBC=FBB-1.D+00
      BE=CDABS(FBC)
      ES=BS*BS
      EE=BE*BE
      PH=DATAN(DIMAG(FBA)/DREAL(FBA))
      WRITE(108,200)(YA,VPR(1),BS,ES,BE,EE,PH)
  200 FORMAT(1H ,7D17.8)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CALC(A,YA)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(18,18)
      COMMON PR,PI,Z,V11,V21,V01,U11,V31,U21,V41,V12,U31,VA,VB,VC,UA,
     1UB,VE,VF,UC
      DATA ZERO/0.D+00/
      DO 2 I=1,18
      DO 1 J=1,18
      A(I,J)=ZERO
    1 CONTINUE
    2 CONTINUE
      VD=V31*V31
      Y=YA*YA

                    MODE TE11

      A(1,2)=(Y-VA)/(Z*YA)
      A(1,4)=PR*V21*(2.*Y*(VA+VB-VA*VB)-VA*VB*(4.-VA-VB))/
     1(Z*YA*V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(1,6)=PR*DSQRT(2.)*V11*VC*(VC+VA-2.*Y)/
     1(Z*YA*(VC-VA)**2.*DSQRT(VA-1.))
      A(1,12)=PR*YA*U21/(Z*V11*(UB-VA)*DSQRT(VA-1.))
      A(2,1)=Z*YA
      A(2,3)=Z*PR*2.*V21*YA*(VA+VB-VA*VB)/
     1(V11*(VB-VA)**2.*DSQRT((VA-1.)*(VB-4.)))
      A(2,5)=-Z*PR*2.*DSQRT(2.)*YA*V11*VC/((VC-VA)**2.*DSQRT(VA-1.))
      A(2,11)=-Z**2.*A(1,12)

                    MODE TE21

      A(3,2)=VA/VB*A(1,4)
      A(3,4)=(Y-VB)/(Z*YA)
      A(3,8)=-PR*2.*YA*U11/(Z*V21*(VB-UA)*DSQRT(VB-4.))
      A(3,10)=PR*V31*(2.*Y*(3.*VD+3.*VB-VD*VB)-VD*VB*(12.-VD-VB))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(3,16)=PR*V12*(2.*Y*(VF+VB-VF*VB)-VF*VB*(4.-VF-VB))/
     1(Z*V21*YA*(VB-VF)**2.*DSQRT((VF-1.)*(VB-4.)))
      A(3,18)=-PR*2.*YA*U31/(Z*V21*(VB-UC)*DSQRT(VB-4.))
      A(4,1)=VA/VB*A(2,3)
      A(4,3)=A(2,1)
      A(4,7)=-Z**2.*A(3,8)
      A(4,9)=Z*PR*2.*V31*YA*(3.*VD+3.*VB-VD*VB)/
     1(V21*(VB-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VB-4.)))
      A(4,15)=Z*PR*2.*V12*YA*(VF+VB-VF*VB)/
     1(V21*(VB-VF)**2.*DSQRT((VB-4.)*(VF-1.)))
      A(4,17)=-Z**2.*A(3,18)

                    MODE TE01

      A(5,2)=VA/VC*A(1,6)
      A(5,6)=(Y-VC)/(Z*YA)
      A(5,16)=PR*DSQRT(2.)*V12*VF*(VC+VF-2.*Y)/
     1(Z*YA*(VC-VF)**2.*DSQRT(VF-1.))
      A(6,1)=VA/VC*A(2,5)
      A(6,5)=A(2,1)
      A(6,15)=-Z*PR*2.*DSQRT(2.)*YA*VF*V12/((VC-VF)**2.*DSQRT(VF-1.))

                    MODE TM11
```

```
 A(7,4)=-VB/UA*A(3,8)
 A(7,8)=-YA/Z
 A(7,12)=PR*YA*U21*(UB+UA)/(Z*U11*(UB-UA)**2.)
 A(8,3)=VB/UA*A(4,7)
 A(8,7)=-Z*(Y-UA)/YA
 A(8,11)=Z*PR*U21*(Y*(UB+UA)-2.*UA*UB)/(U11*YA*(UB-UA)**2.)
```

MODE TE31

```
 A(9,4)=VB/VD*A(3,10)
 A(9,10)=(Y-VD)/(Z*YA)
 A(9,12)=PR*3.*YA*U21/(Z*V31*(UB-VD)*DSQRT(VD-9.))
 A(9,14)=PR*V41*(2.*Y*(6.*VD+6.*VE-VD*VE)-VD*VE*(24.-VE-VD))/
1(Z*V31*YA*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))
 A(10,3)=VB/VD*A(4,9)
 A(10,9)=A(2,1)
 A(10,11)=-Z**2.*A(9,12)
 A(10,13)=Z*PR*2.*V41*YA*(6.*VD+6.*VE-VD*VE)/
1(V31*(VE-VD)**2.*DSQRT((VD-9.)*(VE-16.)))
```

MODE TM21

```
 A(11,2)=-VA/UB*A(1,12)
 A(11,8)=UA/UB*A(7,12)
 A(11,10)=-VD/UB*A(9,12)
 A(11,12)=A(7,8)
 A(11,16)=-PR*YA*V12/(Z*U21*(UB-VF)*DSQRT(VF-1.))
 A(11,18)=PR*YA*U31*(UB+UC)/(Z*U21*(UB-UC)**2.)
 A(12,1)=-VA/UB*A(2,11)
 A(12,7)=UA/UB*A(8,11)
 A(12,9)=-VD/UB*A(10,11)
 A(12,11)=-Z*(Y-UB)/YA
 A(12,15)=-Z**2.*A(11,16)
 A(12,17)=Z*PR*U31*(Y*(UB+UC)-2.*UB*UC)/(U21*YA*(UB-UC)**2.)
```

MODE TE41

```
 A(13,10)=VD/VE*A(9,14)
 A(13,14)=(Y-VE)/(Z*YA)
 A(13,18)=-PR*4.*YA*U31/(Z*V41*(VE-UC)*DSQRT(VE-16.))
 A(14,9)=VD/VE*A(10,13)
 A(14,13)=A(2,1)
 A(14,17)=-Z**2.*A(13,18)
```

MODE TE12

```
 A(15,4)=VB/VF*A(3,16)
 A(15,6)=VC/VF*A(5,16)
 A(15,12)=-UB/VF*A(11,16)
 A(15,16)=(Y-VF)/(Z*YA)
 A(16,3)=VB/VF*A(4,15)
 A(16,5)=VC/VF*A(6,15)
 A(16,11)=-UB/VF*A(12,15)
 A(16,15)=A(2,1)
```

MODE TM31

```
      A(17,4)=-VB/UC*A(3,18)
      A(17,12)=UB/UC*A(11,18)
      A(17,14)=-VE/UC*A(13,18)
      A(17,18)=A(7,8)
      A(18,3)=-VB/UC*A(4,17)
      A(18,11)=UB/UC*A(12,17)
      A(18,13)=-VE/UC*A(14,17)
      A(18,17)=-Z*(Y-UC)/YA
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE STOCK(A,SAUV,NOUV)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(18,18),SAUV(NOUV,NOUV)
      DO 1 I=1,NOUV
      DO 1 J=1,NOUV
    1 SAUV(I,J)=A(I,J)
      RETURN
      END
```

```
*       DEFINE FILE 3=M:LO,2=M:SI
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C
C       DIMENSION A(2,N,N2),V(2,N),VTRAV(2,N),GAMMA(2)
C
        DIMENSION A(2,12,24),V(2,12),VTRAV(2,12),GAMMA(2)
        DATA ZERO,UN/0.D+00,1.D+00/
        COMMON/BLO/F
        COMMON/E2/NN(4)
C
C       ........LECTURE DES DONNEES D''INITIALISATION
C       ........NN(1)=NOMBRE MAXI D''ITERATIONS DE LA PUISSANCE ITEREE
C
C
        N=12
        N2=2*N
        READ(2,100) NN(1)
        READ(2,101)PREC
        READ(2,101)F
        READ(2,102)GAMMA
C
C       ********ECRITURE DES DONNEES
C
        WRITE(3,105) NN(1),PREC,F,GAMMA
C
C       *********INITIALISATION DE V
C
        DO 1 I=1,N
        V(1,I)=UN
        V(2,I)=ZERO
 1      CONTINUE
C
C       *********CALCUL DE GAMMA ET DE V
C
        CALL PERTEH(GAMMA,N,N,A,V,VTRAV,PREC,I)
        IF(I.GE.0)STOP
        I=-I
C
C       *********ECRITURE DES RESULTATS
C
        WRITE(3,103)I,F,GAMMA
        WRITE(3,104)(J,(V(J1,J),J1=1,2),J=1,N)
        STOP
 100    FORMAT(I3)
 101    FORMAT(D15.6)
 102    FORMAT(2D15.6)
 103    FORMAT('1NOMBRE D''ITERATIONS=',I4/'0',10X,'FREQUENCE=',D15.6,5X,'
       1ALPHA=',D15.6,5X,'BETA=',D15.6)
 104    FORMAT('0',I4,D30.6,D15.6)
 105    FORMAT(1H ,'NB MAX D''ITERATIONS=',I3,2X,'PRECISION=',D12.6,2X,'FR
       1EQUENCE=',D12.6,2X,'ALPHA SUPPOSE=',D12.6,2X,'BETA SUPPOSE=',D12.6
       2)
        END
.ES :
```

```
      SUBROUTINE PERTEH(GAMMA,LARG,NORE,A,V,VTRAV,PREC,ICO)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(2,LARG,1),V(2,1),GAMMA(2)
      DATA ZERO,UN/0.D+00,1.D+00/
C
C*****************************************************************
C                                                               *
C     ENTREE:                                                   *
C        V INITIALISE                                           *
C        GAMMA INITIALISE                                       *
C        A TABLEAU DE TRAVAIL (LARG,2*NORE)                     *
C        LA MATRICE EST CONTENUE EN MEMOIRE CENTRALE            *
C     SORTIE:                                                   *
C        GAMMA VALEUR PROPRE                                    *
C        ICO.LT.0 CALCUL EFFECTUE (-NB D'ITERATIONS)            *
C        ICO=0,1 ANOMALIE (MESSAGE D'ERREUR)                    *
C                                                               *
C*****************************************************************
C
      NORE2=2*NORE
      LARG2=2*LARG
      I=0
C
C     DEBUT DES ITERATIONS
C
1     I=I+1
      RLAMB=ZERO
C
C        CONJUGAISON DE V
C
      DO 2 J=1,NORE
      V(2,J)=-V(2,J)
2     CONTINUE
C
C     ........CALCUL DE (M-LAMBDA*I)
C
3     CALL MATRIC(GAMMA,A(1,1,NORE+1),NORE)
C
C     TRIANGULARISATION
C
      CALL TRIANG(A,LARG,LARG2,NORE,1,NORE,A(1,1,NORE+1),RLAMB,NORE2,IBU
     1FF,ICO)
      IF(ICO.EQ.0)RETURN
C
C     CALCUL DE V
C
      CALL CALVEC(A,LARG2,NORE,V,VTRAV,NIT,PREC,RLAMB,ICO)
      IF(ICO.EQ.1)RETURN
      WRITE(3,100)NIT,GAMMA,RLAMB
      IF(ICO.EQ.3)GO TO 3
C
C     CALCUL DU NOUVEAU GAMMA
C
      CALL LAMBDA(A,NORE,V,VTRAV,GAMMA,RLAMB,PREC1)
      WRITE(3,101)I,GAMMA,RLAMB,PREC1
      IF(PREC1.GE.PREC) GO TO 1
      ICO=-I
      RETURN
100   FORMAT('0',5X,'NB IT=',I2,3D15.6)
101   FORMAT('0ITERATION',I3,4D15.6/' ',9('-'))
      END
.ES :
```

```
      SUBROUTINE MATRIC(GAMMA,M,N)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DOUBLE PRECISION M
      DIMENSION M(2,N,N),GAMMA(2)
      COMMON/BLO/F
C
C     ........CALCUL DES LIGNES DE LA MATRICE COMPLEXE (M-LAMBDA*I) ECRI
C     TES EN COLONNES DANS LE TABLEAU A
C
      PI=3.14159D+00
      C=3.D+08
      D=18.D-02
      R=1.D-01
      P=2.D+00*PI*F/C/D
      DRC=6.D-02/N
      DO 2 I=1,N
      R3=I*DRC
      DO 1 J=I,N
      R0=J*DRC
      TRAV=PI*F*(R0*R0+R3*R3)*(1.D+00/R-1.D+00/D)/C
      M(1,J,I)=-P*DSIN(TRAV)
      M(2,J,I)=P*DCOS(TRAV)
      TRAV=(1.D+00-(P*R0*R3/2.D+00)**2+(P*R0*R3)**4/64.D+00-(P*R0*R3)**6
     1/2304.D+00)*DSQRT(R0*R3)*DRC/3.D+00
      M(1,J,I)=M(1,J,I)*TRAV
      M(2,J,I)=M(2,J,I)*TRAV
      L=J-I+1
      M(1,L,I)=M(1,J,I)
      M(2,L,I)=M(2,J,I)
1     CONTINUE
2     CONTINUE
      N1=N/2
      DO 3 K=1,N1
      I=2*K-1
      M(1,1,I)=M(1,1,I)-GAMMA(1)/4.D+00
      M(2,1,I)=M(2,1,I)-GAMMA(2)/4.D+00
3     CONTINUE
      N3=N1-1
      DO 4 K=1,N3
      I=2*K
      M(1,1,I)=M(1,1,I)-GAMMA(1)/2.D+00
      M(2,1,I)=M(2,1,I)-GAMMA(2)/2.D+00
4     CONTINUE
      M(1,1,N)=M(1,1,N)-GAMMA(1)
      M(2,1,N)=M(2,1,N)-GAMMA(2)
      RETURN
      END
ES :
```

```
      SUBROUTINE TRIANG(A,LARG,LARG2,NORE,MIN,MAX,B,RLAMB,LONG,IBUFF,ICO
     &)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(LARG2,1),B(LARG2,1)
      DATA ZERO/0.D+00/
*************************************************************************
*                                                                       *
*     TRIANGULARISATION DE LA MATRICE B-RLAMB*I PAR GAUSS               *
*     TRANSFORMATION DES LIGNES MIN A MAX CONTENUES DANS B              *
*     MATRICE TRIANGULAIRE DANS A                                       *
*     LARG LARGEUR DE BANDE                                             *
*     NORE ORDRE DE LA MATRICE COMPLEXE                                 *
*     LARG2=LARG*2                                                      *
*     RLAMB APPROXIMATION DE LA VALEUR PROPRE DE LA MATRICE REELLE      *
*     LONG NOMBRE DE COLONNES DE A (EN PRATIQUE LARG2)                  *
*     LONG DOIT ETRE UN NOMBRE PAIR .GE. (MAX-MIN+1)*2                  *
*     ICO.GT.0 CALCUL CORRECT                                           *
*     ICO=0 MATRICE SINGULIERE                                          *
*                                                                       *
*************************************************************************

      IF(MIN.GT.1) GO TO 1
        IBUFF=0
        ICO=1

      BOUCLE SUR LES LIGNES A TRANSFORMER

 1    LIG=0
      DO11 LIGNE=MIN,MAX
        IBUFF=IBUFF+1
        LIG=LIG+1
        IF(LIGNE.LE.LARG) GO TO 2
          IF(IBUFF.GT.LONG) IBUFF=1
          ICO=ICO+2
          IF(ICO.GT.LONG) ICO=1

        CHARGEMENT DE LA LIGNE LIGNE

 2      LAR=(NORE-LIGNE+1)*2
        IF(LAR.GT.LARG2) LAR=LARG2
        DO3 J=1,LAR
          A(J,IBUFF)=B(J,LIG)
 3      CONTINUE

        CALCUL DE LA LIGNE SUIVANTE

        I=IBUFF
        IBUFF=IBUFF+1
        J=LAR
        A(J,IBUFF)=ZERO
 4      X=A(J,I)
        J=J-1
        A(J,IBUFF)=-A(J,I)
        IF(J.EQ.1) GO TO 5
          J=J-1
          A(J,IBUFF)=X
        GO TO 4

        CALCUL DE A-RLAMB*I

 5      A(1,IBUFF)=A(1,IBUFF)-RLAMB
        A(1,I)=A(1,I)-RLAMB
```

```
C         TRANSFORMATION DES DEUX DERNIERES LIGNES
C
          DO10 I=1,IBUFF
             IF(LIGNE.EQ.1.AND.I.NE.IBUFF) GO TO 9
                IF(I.EQ.IBUFF) LAR=LAR-1
                L=1
                JMIN=1
    6           L=L-1
                IF(L.LE.0) L=LONG
                JMIN=JMIN+1
                IF(A(JMIN,L).EQ.ZERO) GO TO 8
                   X=-A(JMIN,L)/A(1,L)
                   J2=0
                   DO7 J1=JMIN,LARG2
                      J2=J2+1
                      A(J2,I)=A(J2,I)+X*A(J1,L)
                      IF(J2.EQ.LAR) GO TO 8
    7              CONTINUE
    8              IF(L.NE.ICO) GO TO 6
    9              IF(A(1,I).NE.ZERO) GO TO 10
                      WRITE(3,100)
                      ICO=0
                      RETURN
   10        CONTINUE
   11     CONTINUE
          RETURN
  100     FORMAT('OMATRICE SINGULIERE')
          END
```

```
      SUBROUTINE CALVEC(A,LARG2,NORE,V,VTRAV,NIT,PREC,RLAMB,ICO)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(LARG2,1),V(1),VTRAV(1)
      COMMON/E2/MAXIT,MOC(3)
C
C***********************************************************************
C                                                                     *
C     ALGORITHME DE LA PUISSANCE ITEREE APPLIQUE A                    *
C     L'INVERSE DE LA MATRICE REELLE                                  *
C     LA MATRICE EST EN MEMOIRE CENTRALE                              *
C     ENTREE:                                                         *
C         V INITIALISE (CONJUGUE)                                     *
C     SORTIE:                                                         *
C         ICO=0 V CONJUGUE DU VECTEUR PROPRE                          *
C               RLAMB VALEUR PROPRE                                   *
C         ICO=1 ANOMALIE (VECTEUR NUL)                                *
C         ICO=3 NON CONVERGENCE                                       *
C               RLAMB APPROXIMATION DE LA VALEUR PROPRE               *
C                                                                     *
C***********************************************************************
C
C     INITIALISATION DE VTRAV
C
      NORE2=2*NORE
      DO1 I=1,NORE2
        VTRAV(I)=V(I)
    1 CONTINUE
C
C     DEBUT DES ITERATIONS
C
      NIT=0
    2 NIT=NIT+1
      IF(NIT.LE.MAXIT) GO TO 3
        NIT=NIT-1
        ICO=3
      GO TO 4
C
C     DESCENTE
C
    3 CALL COMBI(A,LARG2,NORE,1,NORE,VTRAV)
C
C     MONTEE
C
      CALL RETRI(A,LARG2,NORE,1,NORE,VTRAV)
C
C     COMPARAISON DE VTRAV ET V
C
      CALL COMP(VTRAV,V,NORE2,X,PREC1,ICO)
      IF(ICO.EQ.1) RETURN
        IF(PREC1.GE.PREC) GO TO 2
          ICO=0
    4 RLAMB=RLAMB+X
      RETURN
      END
S :
```

```
      SUBROUTINE COMBI(A,LARG2,NORE,MIN,MAX,VTRAV)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(LARG2,1),VTRAV(1)
      DATA ZERO/0.D+00/
C
C*********************************************************************
C                                                                    *
C     COMBINAISONS LINEAIRES SUR LE SECOND MEMBRE VTRAV              *
C     DUES AUX TRANSFORMATIONS DES LIGNES MIN A MAX                  *
C     A CONTIENT LES DOUBLES LIGNES MIN A MAX                        *
C     DE LA MATRICE TRIANGULAIRE REELLE                              *
C                                                                    *
C*********************************************************************
C
      ICO=2*MIN-2
      LIG=0
C
C     BOUCLE SUR LES PIVOTS
C
      DO4 LIGNE=MIN,MAX
        LAR=(NORE-LIGNE+1)*2
        IF(LAR.GT.LARG2) LAR=LARG2
C
C       BOUCLE SUR LES PARTIES REELLE ET IMAGINAIRE
C
        DO3 I=1,2
          ICO=ICO+1
          LIG=LIG+1
          IF(VTRAV(ICO).EQ.ZERO) GO TO 3
            IF(I.EQ.1) GO TO 1
              IF(LIGNE.EQ.NORE) RETURN
                LAR=LAR-1
   1        X=-VTRAV(ICO)/A(1,LIG)
            M=ICO
C
C           COMBINAISONS LINEAIRES
C
            DO2 J=2,LAR
              M=M+1
              VTRAV(M)=VTRAV(M)+X*A(J,LIG)
   2        CONTINUE
   3    CONTINUE
   4  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RETRI(A,LARG2,NORE,MIN,MAX,VTRAV)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(LARG2,1),VTRAV(1)
C
C*****************************************************
C                                                    *
C     RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE             *
C     A CONTIENT LES DOUBLES LIGNES MIN A MAX        *
C                                                    *
C*****************************************************
C
      LIG=(MAX-MIN+1)*2
      L=MAX*2
      IF(MAX.LT.NORE) GO TO 1
        VTRAV(L)=VTRAV(L)/A(1,LIG)
        M=L-1
        LIG1=LIG-1
        VTRAV(M)=(VTRAV(M)-A(2,LIG1)*VTRAV(L))/A(1,LIG1)
        L=L-2
        LIG=LIG-2
C
C     BOUCLE REMONTANTE SUR LES LIGNES
C
    1 IF(LIG.LE.0) RETURN
        LIG1=LIG-1
        M=L-1
        LAR=2*NORE-L+2
        IF(LAR.GT.LARG2) LAR=LARG2
        I=L
        DO2 J=3,LAR
          I=I+1
          VTRAV(M)=VTRAV(M)-A(J,LIG1)*VTRAV(I)
          VTRAV(L)=VTRAV(L)-A(J-1,LIG)*VTRAV(I)
    2   CONTINUE
        VTRAV(L)=VTRAV(L)/A(1,LIG)
        VTRAV(M)=(VTRAV(M)-A(2,LIG1)*VTRAV(L))/A(1,LIG1)
        L=L-2
        LIG=LIG-2
      GO TO 1
      END
```

```
      SUBROUTINE COMP(VTRAV,V,NORE2,X,PREC1,ICO)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION VTRAV(1),V(1)
      DATA ZERO,UN/0.D+00,1.D+00/
C
C************************************************************************
C                                                                       *
C     COMPARAISON DE VTRAV ET V                                         *
C     ENTREE:                                                           *
C         V NORME                                                       *
C     SORTIE:                                                           *
C         1/X PLUS GRANDE COMPOSANTE DE VTRAV                           *
C         VTRAV NORME                                                   *
C         PREC1 PLUS GRANDE DIFFERENCE RELATIVE ENTRE VTRAV ET V        *
C         (COMPOSANTE PAR COMPOSANTE)                                   *
C         V=VTRAV                                                       *
C         ICO=0 CALCUL CORRECT                                          *
C         ICO=1 VTRAV NUL                                               *
C     NORE2=2*NORE                                                      *
C                                                                       *
C************************************************************************
C
C     CALCUL DE X
C
      X=ZERO
      DO1 I=1,NORE2
        PREC1=DABS(VTRAV(I))
        IF(PREC1.LE.X) GO TO 1
          X=PREC1
          M=I
    1 CONTINUE
      IF(X.GT.ZERO) GO TO 2
        WRITE(3,100)
        ICO=1
        RETURN
    2 X=UN/VTRAV(M)
      PREC1=ZERO
      DO3 I=1,NORE2
C
C     NORMALISATION DE VTRAV
C
        VTRAV(I)=VTRAV(I)*X
C
C       COMPARAISON DE VTRAV ET V
C       CALCUL DE PREC1
C
        V(I)=V(I)-VTRAV(I)
        IF(VTRAV(I).NE.ZERO) V(I)=V(I)/VTRAV(I)
        V(I)=DABS(V(I))
        IF(V(I).GT.PREC1) PREC1=V(I)
C
C       V=VTRAV
C
        V(I)=VTRAV(I)
    3 CONTINUE
      ICO=0
      RETURN
  100 FORMAT('0VECTEUR NUL')
      END
```

```
      SUBROUTINE LAMBDA(A,N,V,VTRAV,GAMMA,RLAMB,PREC1)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(2,N,N),V(2,N),VTRAV(2,N),GAMMA(2),DGAMMA(2)
      DATA ZERO,DEUX,QUATRE/0.D+00,2.D+00,4.D+00/
      CALL MATRIC(GAMMA,A,N)
      DO 2 I=1,N
      DO 1 J=1,2
      VTRAV(J,I)=ZERO
    1 CONTINUE
    2 CONTINUE
      DO 4 I=1,N
      DO 3 J=I,N
      L=J-I+1
      VTRAV(1,I)=VTRAV(1,I)+A(1,L,I)*V(1,J)+A(2,L,I)*V(2,J)
      VTRAV(2,I)=VTRAV(2,I)+A(2,L,I)*V(1,J)-A(1,L,I)*V(2,J)
      IF(I.EQ.J) GO TO 3
      VTRAV(1,J)=VTRAV(1,J)+A(1,L,I)*V(1,I)+A(2,L,I)*V(2,I)
      VTRAV(2,J)=VTRAV(2,J)+A(2,L,I)*V(1,I)-A(1,L,I)*V(2,I)
    3 CONTINUE
    4 CONTINUE
      RLAMB=ZERO
      RNORM=ZERO
      DO 6 I=1,N
      DO 5 J=1,2
      RLAMB=RLAMB+V(J,I)*VTRAV(J,I)
      RNORM=RNORM+V(J,I)*V(J,I)
    5 CONTINUE
    6 CONTINUE
      RLAMB=RLAMB/RNORM
      DGAMMA(1)=ZERO
      DGAMMA(2)=ZERO
      DO 7 I=1,N,2
      DGAMMA(1)=DGAMMA(1)+(V(2,I)*V(2,I)-V(1,I)*V(1,I))/QUATRE
      DGAMMA(2)=DGAMMA(2)-V(1,I)*V(2,I)/QUATRE
      V(2,I)=-V(2,I)
      J=I+1
      IF(J.EQ.N) GO TO 7
      DGAMMA(1)=DGAMMA(1)+(V(2,J)*V(2,J)-V(1,J)*V(1,J))/DEUX
      DGAMMA(2)=DGAMMA(2)-V(1,J)*V(2,J)/DEUX
      V(2,J)=-V(2,J)
    7 CONTINUE
      DGAMMA(1)=DGAMMA(1)+V(2,N)*V(2,N)-V(1,N)*V(1,N)
      DGAMMA(2)=DGAMMA(2)-V(1,N)*V(2,N)
      V(2,N)=-V(2,N)
      DGAMMA(1)=DGAMMA(1)/RNORM
      DGAMMA(2)=DGAMMA(2)*DEUX/RNORM
      RNORM=DGAMMA(1)*DGAMMA(1)+DGAMMA(2)*DGAMMA(2)
      IF(RNORM.LE.ZERO)RETURN
      RNORM=-RLAMB/RNORM
      PREC1=ZERO
      DO 8 I=1,2
      DGAMMA(I)=DGAMMA(I)*RNORM
      GAMMA(I)=GAMMA(I)+DGAMMA(I)
      IF(GAMMA(I).NE.ZERO) DGAMMA(I)=DGAMMA(I)/GAMMA(I)
      DGAMMA(I)=DABS(DGAMMA(I))
      IF(DGAMMA(I).GT.PREC1) PREC1=DGAMMA(I)
    8 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
;UBRCUTINE DMRTIS(A,M,N)
:MPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
)IMENSION A(1)

1. A: TABLEAU REEL CONTENANT LA MATRICE A TRANSPOSER.
APRES EXECUTION, LA MATRICE TRANSPOSEE SE TROUVE DANS A.
2. M: NOMBRE DE LIGNES DE A.
3. N: NOMBRE DE COLONNES DE A.

MN1=M*N-1
MNN=MN1-N
MN2=MN1-1
K=0
I1=1
DO 8 I=2,MN2
IF(K-MNN) 2,2,3
J=K+N
K=K+N
GOTO 4
J=K-MNN
K=K-MNN
IF(J-I1) 5,7,6
JN=J*N
J=JN-JN/MN1*MN1
GOTO 4
IF(J.EQ.I1) GOTO 7
J=J+1
T=A(I)
A(I)=A(J)
A(J)=T
I1=I
CONTINUE
RETURN
END

   STEP   WAIT   CORE      END      DISC      TIME    START   CODE  PROGRAM
     01   00.10    17   10*26*21    00       00.00 10*25*59 TERM  FMGE
*****************************************************************************
*****************************************************************************
TIME         TIME*CORE        CORE-USE     TIME*DISC      DISC-USE
00.00           00.08             81%        00.44             00%

  DS         DS              SHR         SHR          CR          CP         L
I/O-BYTES I/O-CALLS      I/O-BYTES  I/O-CALLS      CARDS       CARDS       PA
  33384        26              00          00          05          00
JT    10*26*23*
```